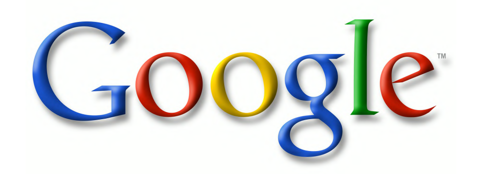



Hosted by Google

FREIE PERSPEKTIVE.

FREIE PERSPEKTIVE

[CENTRALE PROJEKTION]

IN IHRER

BEGRÜNDUNG UND ANWENDUNG

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE
HÖHERER LEHRANSTALTEN UND DAS SELBSTSTUDIUM

VON

DR. GUSTAV AD. V. PESCHKA,

k. k. Regierungsrat, ordentl. Professor der Darstellenden Geometrie und des konstruktiven Zeichnens an der k. k. technischen Hochschule in Brünn; Inhaber der k. k. grossen goldenen Medaille für Wissenschaft und Kunst und des goldenen Verdienstkreuzes mit der Krone, Ritter des Grossherzogl. Hess. Verdienstordens I. Klasse, des Herzogl. Sächs. Ernestin. Hausordens, des St. Sava-Ordens, Offizier des königl. serb. Takowo-Ordens etc.

Zweite vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage.

BAND II.

Mit 30 Textfiguren und XVI lithographischen Tafeln.

LEIPZIG 1889.

Baumgärtner's Buchhandlung.

Leipzig. Druck von Grimme & Trömel.

Inhaltsverzeichnis.

Zweiter Teil.

Krumme Flächen.

V. Abschnitt.

Krumme Flächen im allgemeinen.

XI. Kapitel.

Einleitende Bemerkungen. Definitionen. Allgemeine Eigenschaften der Flächen. Einteilung der Flächen.

VI. Abschnitt.

Kegel- und Cylinderflächen.

XII. Kapitel.

Eigenschaften der Kegel- und Cylinderflächen im allgemeinen.

XIII. Kapitel.

Kegel- und Cylinderflächen zweiten Grades.

VII. Abschnitt.

Flächen zweiten Grades.

XIV. Kapitel.

Allgemeine Eigenschaften der Flächen zweiten Grades.



XV. Kapitel.

Darstellung der Kegel und Cylinder zweiten Grades, ihrer ebenen Schnitte, Tangentialebenen u. s. w. in centraler Projektion.

XVI. Kapitel.

Windschiefe Flächen zweiten Grades.

VIII. Abschnitt.

Windschiefe Flächen höherer Ordnung.

XVII. Kapitel.

Allgemeine Eigenschaften.

XVIII. Kapitel.

Konoide, Cylindroid, Wölbfläche.

IX. Abschnitt.

Aufwickelbare Flächen.

XIX. Kapitel.

Erzeugung aufwickelbarer Flächen.

X. Abschnitt.

Die Rotationsflächen.

XX. Kapitel.

Eigenschaften, Definitionen und Konstruktionen.



XI. Abschnitt.

Konstruktionen von und an Flächen zweiten Grades.

XXI. Kapitel.

Die Kugel.

XXII. Kapitel.

Rotationsflächen zweiten Grades.

XXIII. Kapitel.

Dreiachsige Flächen zweiten Grades.

XII. Abschnitt.

Umhüllungsflächen.

XXIV. Kapitel.

XIII. Abschnitt.

Die Schraubenlinie und die geradlinigen Schraubenflächen.

XXV. Kapitel.

Eigenschaften und Konstruktion der Schraubenlinie.

XXVI. Kapitel.

Schraubenflächen.

XIV. Abschnitt.

Gegenseitiger Schnitt zweier krummen Flächen.

XXVII. Kapitel.

XV. Abschnitt.

Konstruktion der Schatten.

XXVIII. Kapitel.

Anhang.

Besondere centralprojektivische Darstellungsarten.

XXIX. Kapitel.

Centralprojektivische Darstellung der Reliefs gegebener Originalgebilde.

XXX. Kapitel.

Centralprojektivische Darstellung auf Grund der „perspektivischen Massstäbe".

XXXI. Kapitel.

Bestimmung perspektivischer Bilder räumlicher Gebilde, wenn behufs deren Feststellung die orthogonalen Projektionen derselben in bezug auf zwei zu einander senkrecht stehende Ebenen als gegeben vorliegen.



XXXII. Kapitel.

Perspektivische Darstellung architektonischer Objekte.

Darstellung verschiedener Objekte.

Alphabetisches Register.

Zweiter Teil.

Krumme Flächen.

V. Abschnitt.

Krumme Flächen im allgemeinen.

XI. Kapitel.

Einleitende Bemerkungen. Definitionen. Allgemeine Eigenschaften der Flächen. Einteilung der Flächen.

§ 258.

Bewegt sich eine Linie, d. i. der geometrische Ort einer einfach unendlichen Anzahl stetig aufeinander folgender Punkte, nach irgend einem Gesetze derart im Raume, dass das Resultat selbst wieder eine stetige Folge von einfach unendlich vielen Lagen der genannten Linie repräsentiert, so entsteht, als Inbegriff oder geometrischer Ort aller dieser Lagen, ein geometrisches Gebilde, welches eine *„Fläche“* genannt wird.

Eine so entstandene Fläche kann selbstverständlich auch eine *„Ebene“* sein; ist sie aber von dieser letzteren in der Gestalt und in den Eigenschaften verschieden, so wird dieselbe als *„krumme Fläche“* bezeichnet.

Aus der vorher aufgestellten Definition folgt unmittelbar, dass eine krumme Fläche eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit oder einen zweistufigen Ort von Punkten repräsentiert.

Die Linien, welche eine krumme Fläche erzeugen, und welche im allgemeinen ebenfalls krumme Linien oder Kurven sind, im besonderen aber auch gerade Linien sein können, werden



die *„Erzeugenden“* der Fläche genannt. Das Gesetz, nach welchem die Erzeugenden ihre Lage und allenfalls auch ihre Gestalt ändern, pflegt man das *„Erzeugungsgesetz“* der krummen Fläche zu nennen.

Da infolge der vorbezeichneten Stetigkeit jeder Punkt einer krummen Fläche von einfach unendlich vielen, ihm unendlich nahe liegenden Punkten umgeben ist (welche man sich als die Peripheriepunkte eines unendlich kleinen Kreises vorstellen kann), so ist einleuchtend, dass man von jedem Punkte der Fläche nach unendlich vielen Richtungen zu unmittelbar benachbarten Flächenpunkten gelangen kann.

Denkt man sich eine derartige Verbindung von stetig aufeinander folgenden Flächenpunkten entweder regellos oder nach einem bestimmten Gesetze fortgesetzt, so erhält man eine krumme Linie, welche bloss aus Flächenpunkten zusammengesetzt erscheint, und deshalb als eine „Kurve der Fläche“ oder als „Kurve auf der Fläche liegend“ bezeichnet wird.

Man sieht ohne weiteres ein, dass die Anzahl der auf einer Fläche liegenden Kurven unendlich gross ist, dass dieselben ein System von sozusagen unendlicher Stufe bilden, von welchem die die Fläche erzeugenden Kurven, obzwar selbst in unendlicher Anzahl vorhanden, nur einen verschwindend kleinen Bestandteil bilden.

Hieraus folgt, dass eine irgendwie erzeugte Fläche, auf unendlich viele andere Arten erzeugt gedacht werden kann, indem man irgend eine einfach unendliche Schar auf der Fläche liegender, nach einem bestimmten Gesetze — dem neuen Erzeugungsgesetze — voneinander abhängiger Kurven als neue Erzeugenden betrachtet. Es ist an und für sich klar, dass die ursprüngliche Erzeugungsart einer Fläche nicht immer auch die einfachste sein muss.

§ 259.

Wie bereits erwähnt, kann das Erzeugungsgesetz einer krummen Fläche voraussetzen, dass die Erzeugenden, ohne ihre Form zu ändern, bloss einfach unendlich viele stetig aufeinander folgende Lagen im Raume einnehmen, oder aber, dass jeder unendlich kleinen Änderung in der Lage einer Erzeugenden gleichzeitig auch eine unendlich kleine Änderung ihrer Gestalt

entspricht. Dieser Umstand gibt Veranlassung zu einer Einteilung der krummen Flächen in solche, welche

A) von einer Linie von unveränderlicher Gestalt und Grösse erzeugt werden, und

B) in solche Flächen, deren Erzeugenden der Grösse und Form nach veränderlich sind.

Die Flächen der erstangeführten Art gestatten mit Rücksicht auf die besondere Natur der Erzeugenden oder des Erzeugungsgesetzes noch folgende bemerkenswerte Unterabteilungen.

a) *„Regelflächen“* oder *„Linienflächen“* d. h. solche, welche durch eine gerade Linie erzeugt werden. Man unterscheidet hierbei *„windschiefe Regelflächen“* und *„aufwickelbare Regelflächen“*, je nachdem je zwei unmittelbar aufeinander folgende Erzeugenden (Geraden) der Fläche sich nicht schneiden oder aber einen Punkt gemein haben.

Gehen insbesondere alle Erzeugenden durch denselben Punkt, so bezeichnet man die aufwickelbare Fläche als *„Kegelfläche“* oder, falls der genannte Punkt im Unendlichen liegt, als eine *„Cylinderfläche.“*

b) *„Rotationsflächen“* oder *„Umdrehungsflächen“*, welche durch Umdrehung einer unveränderlichen mit einer Geraden — der *„Drehungsachse“* — fest verbundenen Kurve um die letztere entstehen.

c) *„Rückungs-“* und *„Röhrenflächen“* von *„unveränderlichem Querschnitt.“*

Unter *„Röhrenflächen“* versteht man solche, welche durch eine unveränderliche ebene Kurve derart erzeugt werden, dass ein bestimmter Punkt der letzteren eine zweite gegebene Kurve, die *„Leitkurve“* durchläuft, und die zugehörige Tangente der letzteren gleichzeitig normal zur Ebene der ersteren Kurve ist.

„Rückungsflächen“ von unveränderlichem Querschnitt entstehen durch die Parallelverschiebung einer unveränderlichen Kurve längs einer gegebenen festen Kurve, der *„Leitkurve“*.

Die Flächen der zweiten Art sind in ihrer Erzeugungsweise so mannigfaltig, dass keine charakteristischen Unterabteilungen derselben aufgestellt werden können.

Es ist von selbst einleuchtend, dass jede Fläche der ersten Art gleichzeitig als eine Fläche der zweiten Art aufgefasst werden kann, dass aber nicht auch das umgekehrte seine Geltung habe.

So kann beispielsweise jede windschiefe Regelfläche auf unendlich viele Arten durch veränderliche Kurven, welche auf ihr liegen, erzeugt werden; umgekehrt kann jedoch eine durch eine veränderliche Kurve erzeugte Fläche nur dann eine windschiefe Regelfläche sein, wenn sich auf irgend eine Weise zeigen lässt, dass sie einfach unendlich viele Geraden enthält.

§ 260.

Wir wollen nun die Beziehungen, welche eine Gerade, eine Ebene oder ein Punkt zu einer Fläche haben können, untersuchen und die hieraus folgenden Eigenschaften ableiten.

Eine gerade Linie kann entweder einer krummen Fläche angehören, in welchem Falle sie alle Punkte mit der Fläche gemein hat, oder sie kann die Fläche schneiden, d. h. eine endliche Anzahl von Punkten mit der Fläche gemein haben.

Hat eine Fläche mit einer beliebigen Geraden im Raume n (reelle oder imaginäre) Punkte gemein, so bezeichnet man diese Fläche als eine *„Fläche n-ter Ordnung“*.

Selbstverständlich gibt es auch Fälle, in welchen eine Gerade mit einer Fläche, ohne mit ihr zusammenzufallen, unendlich viele Punkte gemein hat. Derartige Flächen haben sodann eine unendlich grosse Ordnungszahl, und werden *„transcendente“* Flächen genannt, zum Unterschiede von Flächen mit endlicher Ordnungszahl, welche als *„algebraische“* Flächen bezeichnet werden. Diese Bezeichnungen rühren bekanntlich von dem Umstande her, dass in der analytischen Geometrie die Gleichungen der erstgenannten Flächen transcendent, die der letzteren jedoch algebraisch sind.

Der aufgestellten Definition gemäss ist also eine Ebene, da sie mit einer beliebigen Geraden des Raumes nur einen Punkt gemein hat, eine Fläche *„erster Ordnung“*; eine Kugel dagegen, welche mit einer Geraden im Raume zwei (reelle oder imaginäre) Punkte gemein hat, eine Fläche *„zweiter Ordnung“* u. s. w.

Nachdem eine Gerade mit einer Fläche im allgemeinen eine endliche Anzahl von Punkten gemein hat, so wird eine Ebene, welche man allenfalls als geometrischen Ort der Geraden eines Strahlenbüschels betrachten kann, mit der Fläche einfach unendlich viele Punkte gemein haben, oder mit anderen Worten: eine Ebene wird die Fläche in einer Kurve schneiden.

Da ferner eine solche Kurve mit jeder in ihrer Ebene liegenden Geraden dieselben Punkte gemein hat, in welchen diese Gerade die Fläche trifft, so folgt der Satz:

„Der Schnitt einer Fläche **n**-*ter Ordnung mit einer Ebene ist eine Kurve* **n**-*ter Ordnung.“*

§ 261.

Bezeichnen wir zwei auf einer krummen Fläche **F** liegende, unendlich nahe Punkte mit **a** und **b**, so wird deren Verbindungsgerade **t** diese beiden Punkte mit der Fläche gemein haben, und wird als solche eine *„Tangente“* der Fläche genannt. Die Vereinigung der beiden unendlich nahen Punkte heisst der *„Berührungspunkt“* der Tangente **t**.

Da man durch die beiden unendlich nahen Punkte **a** und **b** unendlich viele auf der Fläche liegende Kurven führen kann, so ist die Tangente **t** der Fläche selbstverständlich auch eine Tangente aller dieser Kurven in dem nämlichen Berührungspunkte (**ab**).

Umgekehrt ist die Tangente einer beliebig auf einer Fläche gezeichneten Kurve in einem ihrer Punkte gleichzeitig auch eine Tangente der Fläche in demselben Punkte, da die beiden unendlich nahen Punkte, welche die besagte Tangente mit der Kurve gemein hat, auch der Fläche angehören.

Liegt auf einer Fläche eine Gerade, so kann diese stets als die Verbindungsgerade zweier ihrer Punkte, im allgemeinen also auch als Verbindungsgerade zweier ihrer unendlich nahen Punkte betrachtet werden, woraus folgt, dass die bezeichnete Gerade als eine Tangente der Fläche in jedem ihrer (der Geraden) Punkte aufgefasst werden kann.

§ 262.

Denken wir uns auf einer Fläche **F** einen beliebigen Punkt **a** [Fig. 206, Taf. XIV] angenommen.

Wie an früherer Stelle (§ 258) erwähnt wurde, kann man durch diesen Punkt **a** auf der Fläche unendlich viele Kurven C, C_1, C_2 . . . nach allen möglichen Richtungen führen, d. i. Kurven zeichnen, die durch **a** und die den Punkt **a** im Kreise umgebenden einfach unendlich vielen, unendlich nahe an **a** gelegenen Punkte gehen. Eine Fläche besitzt hiernach in jedem Punkte

im allgemeinen einfach unendlich viele Tangenten, d. h. die Tangenten $\mathbf{t}$, $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$ . . . der vorgenannten Kurve $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ . . .

Es ist nun leicht zu zeigen, dass alle diese Tangenten in einer und derselben Ebene liegen.

Setzen wir zum Zwecke dieses Nachweises irgend zwei durch **a** gehende Kurven $\mathbf{C}_1$ und $\mathbf{C}_2$ der Fläche **F** und ihre Tangenten $\mathbf{t}_1$ und $\mathbf{t}_2$ als fest voraus, und nehmen wir an, eine dritte Kurve, von welcher **C'** eine Lage repräsentieren möge, erzeuge die Fläche **F**.

Die erzeugende Kurve trifft in der Lage **C'** die beiden festen Kurven $\mathbf{C}_1$ und $\mathbf{C}_2$ in zwei Punkten **b** und **c**, welche untereinander und mit **a** verbunden, beziehungsweise die drei Geraden **s**, $\mathbf{s}_1$ und $\mathbf{s}_2$ ergeben. Diese drei Geraden bilden ein Dreieck, liegen also in einer und derselben Ebene, und repräsentieren gleichzeitig drei Sekanten der Kurven **C'**, $\mathbf{C}_1$ und $\mathbf{C}_2$.

Denkt man sich nun, dass die Kurve **C'**, die Fläche **F** erzeugend, sich immer mehr und mehr dem Punkte **a** nähere und endlich eine Lage **C** annehme, in welcher sie den Punkt **a** enthält, so werden sich gleichzeitig auch die Punkte **b** und **c** auf den Kurven $\mathbf{C}_1$ und $\mathbf{C}_2$ immer mehr dem Punkte **a** und einander nähern, bis sie endlich beide mit **a** selbst zusammenfallen. Hierbei werden sich aber auch die drei Sekanten **s**, $\mathbf{s}_1$ und $\mathbf{s}_2$, ohne aufzuhören einer und derselben Ebene anzugehören, den Tangenten **t**, $\mathbf{t}_1$ und $\mathbf{t}_2$ der drei Kurven **C**, $\mathbf{C}_1$ und $\mathbf{C}_2$ nähern und endlich mit denselben zur Deckung gelangen.

Hiermit ist nachgewiesen, dass die Tangente **t** der veränderlichen Kurve **C** im Punkte **a** in derjenigen Ebene liegt, welche durch die beiden als fest angenommenen Tangenten $\mathbf{t}_1$ und $\mathbf{t}_2$ bestimmt ist.

Würde man die Fläche durch andere Kurven erzeugen, so würde man auf gleiche Weise finden, dass die Tangente der durch **a** gehenden Lage der neuen Frzeugenden ebenfalls in der Ebene ($\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$) liege, dass also überhaupt sämtliche Tangenten der Fläche im Punkte **a** in der Ebene ($\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$) liegen müssen.

Zu gleichem Resultate gelangt man auch durch folgende indirekte Überlegung. Würden die sämtlichen Tangenten der Fläche im Punkte **a** nicht in einer und derselben Ebene liegen, so müssen sie paarweise Winkel von irgend welcher Grösse bilden; es müsste also auch eine Kurve auf der Fläche, welche zwei solche Tangenten **t** und **t'** berühren sollte, notwendig in **a** einen sogenannten Doppelpunkt, d. i. die in Fig. 207, Taf. XIV angedeu-

tete Gestalt besitzen, was aber offenbar nicht in jedem Punkte der Fläche der Fall sein kann. Es folgt mithin der Satz:

„Sämtliche Tangenten einer krummen Fläche in einem beliebigen ihrer Punkte liegen in einer und derselben Ebene.“

Die besagte Ebene pflegt man die *„Berührungsebene“* oder die *„Tangentialebene“* der Fläche **F** in dem betreffenden Punkte **a** zu nennen.

Der vorstehenden Betrachtung ist ohne weiteres auch zu entnehmen, dass die Tangentialebene einer Fläche in einem Punkte der letzteren durch zwei Tangenten der Fläche in diesem Punkte vollständig bestimmt ist, ein Resultat, welches für die konstruktive Bestimmung von Tangentialebenen an krumme Flächen von der grössten Bedeutung ist.

In § 261 wurde gezeigt, dass eine auf einer Fläche liegende Gerade gleichzeitig in allen ihren Punkten eine Flächentangente darstelle.

Geht also durch einen auf der Fläche liegenden Punkt **a** eine Gerade, so ist dieselbe eine der unendlich vielen durch **a** gehenden Flächentangenten, und muss mithin in der Tangentialebene der Fläche im Punkte **a** liegen. Es besteht daher der Satz:

„Die Berührungsebene einer krummen Fläche in jedem Punkte einer der Fläche angehörenden Geraden enthält stets diese Gerade.“

§ 263.

Denken wir uns auf irgend einer Fläche **F** einen beliebigen Punkt **a** angenommen, und sei **T** die Tangentialebene in demselben.

Wird durch **a** eine beliebige Ebene **E** gelegt, so wird diese die Fläche in einer durch **a** gehenden Kurve **C** schneiden. Die Tangente **t** dieser Kurve im Punkte **a** ist aber gleichzeitig eine Tangente der Fläche **F** in dem nämlichen Punkte und muss daher in der Tangentialebene **T** liegen. Nachdem aber die genannte Kurventangente **t** notwendig auch in der Ebene **E** der Kurve **C** liegen muss, so wird die besagte Tangente offenbar durch den Schnitt der beiden Ebenen **E** und **T** dargestellt. Daher gilt der Satz:

„Die Tangentialebene einer Fläche wird von einer durch den Berührungspunkt gehenden Ebene in einer Tangente derjenigen Kurve geschnitten, welche sich als Schnitt dieser Ebene mit der Fläche ergibt.“

§ 264.

Eine beliebige Fläche **F** [Fig. 208, Taf. XIV] und ein dieser Fläche nicht angehörender, also ausserhalb derselben liegender Punkt **P** sei gegeben; es ist zu untersuchen, ob durch diesen Punkt Tangenten beziehungsweise Berührebenen der Fläche gehen.

Denken wir uns zu diesem Zwecke allenfalls durch **P** eine Ebene **e** gelegt, welche die Fläche **F** in einer Kurve **C** schneiden mag. An diese Kurve **C** lässt sich von **P** aus eine bestimmte endliche Anzahl von Tangenten führen. Selbstverständlich werden diese Tangenten gleichzeitig auch die Fläche in den nämlichen Punkten berühren, in welchen sie die Kurve **C** tangieren.

Nachdem aber solcher Ebenen **e** durch **P** unendlich viele gelegt werden können (beispielsweise alle Ebenen eines Ebenenbüschels, dessen Achse irgend eine durch **P** gehende Gerade **g** sein kann), so folgt unmittelbar, dass auch die Zahl der durch **P** gehenden Flächentangenten unendlich gross sei.

Alle diese Tangenten bilden eine Kegelfläche, deren Scheitel der Punkt **P** ist, und welche als die *„der Fläche aus dem Punkte* **P** *umschriebene Kegelfläche“* oder kurz als ein der Fläche *„umschriebener Kegel“* bezeichnet wird.

Der geometrische Ort der Berührungspunkte **a** . . . aller durch **P** gehenden Tangenten **t** . . . ist eine auf der Fläche liegende Kurve B_p, welche die *„Berührungskurve des umschriebenen Kegels“* oder die dem Punkte **P** *„entsprechende Berührungskurve“* genannt wird. Ziehen wir in einem beliebigen Punkte **a** der Berührungskurve B_P die Tangente **t'** an die letztere, sowie auch die durch **P** gehende Flächentangente **t**, so ist durch **t** und **t'** die Tangentialebene der Fläche im Punkte **a** (nach § 262) vollkommen bestimmt.

Das Gleiche gilt offenbar von jedem beliebigen anderen Punkte der Berührungskurve B_p, so dass diese nicht nur den geometrischen Ort der Berührungspunkte der Fläche mit allen durch **P** gehenden Tangenten, sondern auch mit allen durch **P** gehenden Tangentialebenen repräsentiert.

Berücksichtigen wir weiter, dass die Kurve B_p auch dem umschriebenen Kegel angehört, die Gerade **t'** also auch eine Tangente des letzteren ist, und dass ferner die auf dem Kegel liegende durch **a** gehende Gerade **t** (nach Satz 2, § 262) der Berührungs-

ebene des Kegels im Punkte **a** angehören muss, so finden wir, dass die Tangentialebene (**t**, **t'**) der Fläche **F** im Punkte **a** auch den umschriebenen Kegel (**P**, B_P) in dem nämlichen Punkte **a** berührt. Es folgt daher der Satz:

„*Die unendlich vielen von einem einer Fläche nicht angehörenden Punkte an die letztere gelegten Tangenten sind Erzeugenden eines Kegels; ihre Berührungspunkte bilden eine der Fläche und dem umschriebenen Kegel gemeinschaftliche Kurve. Die Tangentialebenen der Fläche in allen Punkten dieser Kurve sind gleichzeitig auch Tangentialebenen des umschriebenen Kegels.*“

Liegt der Punkt **P** in unendlicher Entfernung, sind also die an die Fläche gelegten Tangenten und Tangentialebenen sämtlich zu einer gegebenen Geraden parallel, so tritt an die Stelle des umschriebenen Kegels insbesondere ein umschriebener Cylinder.

§ 265.

Da, wie eben gezeigt wurde, durch einen beliebigen Punkt einfach unendlich viele Tangentialebenen gelegt werden können, so ist ohne weiteres klar, dass die Zahl der durch irgend eine Gerade **g** [Fig. 208, Taf. XIV] an eine Fläche **F** gelegten Tangentialebenen notwendig eine endliche sein muss.

Denken wir uns auf der Geraden **g** [Fig. 208, Taf. XIV] zwei beliebige Punkte **P** und **Q** angenommen, und seien B_P resp. B_Q die den besagten Punkten entsprechenden Berührungskurven. Die letzteren werden sich in einer gewissen Anzahl von Punkten **m** . . . schneiden, und es ist leicht einzusehen, dass jeder dieser Punkte ein Berührungspunkt der Fläche mit einer durch die Gerade **g** gehenden Tangentialebene sei. So ist beispielsweise die Ebene (**g**, **m**) eine Tangentialebene, denn sie enthält die Erzeugenden $Pm = t_1$ und $Qm = t_2$ der beiden beziehungsweise aus **P** und **Q** umschriebenen Kegel, d. h. zwei Tangenten der Fläche **F** im Punkte **m**.

Denken wir uns endlich einen beliebigen dritten Punkt **R** auf der Geraden **g** angenommen, so wird die demselben entsprechende Berührungskurve, als Ort der Berührungspunkte aller durch **R** gehenden Tangentialebenen, auch die Berührungspunkte **m** . . . der durch **g** gehenden Berührebenen enthalten; es folgt sonach der Satz:

„Die allen Punkten einer und derselben Geraden entsprechenden Berührungskurven auf einer Fläche gehen durch eine Anzahl fester Punkte auf der Fläche, d. i. durch die Berührungspunkte aller die genannte Gerade enthaltenden Tangentialebenen.“

Gehen durch eine Gerade an eine Fläche n Tangentialebenen, so bezeichnet man dieselbe als eine *„Fläche* n*-ter Klasse“*.

Die Klassenzahl und die Ordnungszahl einer Fläche stimmen im allgemeinen nicht überein. Ist jedoch eine Fläche gleichzeitig von der n-ten Ordnung und der n-ten Klasse, so nennt man sie eine *„Fläche* n*-ten Grades“*.

VI. Abschnitt.

Kegel- und Cylinderflächen.

XII. Kapitel.

Eigenschaften der Kegel- und Cylinderflächen im allgemeinen.

§ 266.

Wie bereits in § 259 erwähnt wurde, ist eine Kegelfläche der geometrische Ort einfach unendlich vieler, stetig aufeinander folgender Geraden, welche sämtlich durch einen festen Punkt, den *„Scheitel"*, *„Mittelpunkt"* oder die *„Spitze"* des Kegels, gehen.

Liegt dieser Scheitel insbesondere in unendlicher Entfernung, so sind die Erzeugenden der Fläche sämtlich untereinander parallel, und die Kegelfläche übergeht in eine *„Cylinderfläche"*.

Soll bei gegebenem Scheitel eine bestimmte Kegelfläche erzeugt werden, so muss die Lage der Erzeugenden selbstverständlich durch irgend eine weitere (einfache) Bedingung festgestellt sein.

Eine der gewöhnlichsten Bedingungen ist die, dass die Kegelfläche eine gegebene ebene oder Raum-Kurve zu enthalten habe. Diesfalls ergeben sich die Kegelerzeugenden sofort als die Verbindungsgeraden des Kegelscheitels mit den einzelnen Punkten dieser Kurve. Die letztere wird deshalb die *„Leitkurve"* des Kegels genannt.

Es ist ohne weiteres einleuchtend, dass die Eigenschaften einer Kegelfläche lediglich von den Eigenschaften der ihr zu Grunde liegenden Leitkurve abhängen werden. Hierbei ist es selbstverständlich gleichgültig, ob die Leitkurve eine ebene oder eine Raumkurve ist, da im letzteren Falle die gegebene Kurve ohne weiteres durch den Schnitt des erzeugten Kegels mit einer Ebene ersetzt werden kann. Für die weiteren Betrachtungen können wir

deshalb anstandslos von der Voraussetzung ausgehen, dass die Leitkurve **L** [Fig. 209, Taf. XIV] eine ebene Kurve sei. Die Ebene der letzteren bezeichnen wir kurz mit $\mathbf{E_L}$ und den Kegelscheitel mit **S**.

Die Kegelfläche (**S**, **L**) kann in jedem Falle als eine Pyramide betrachtet werden, wenn man die Leitkurve als ein Basispolygon von unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten auffasst; es werden mithin alle projektivischen Eigenschaften, welche für Pyramiden ihre Geltung haben, unmittelbar auch auf Kegelflächen ausgedehnt werden können.

Hiernach tritt an die Stelle des in § 246 für Pyramiden bewiesenen Satzes unmittelbar der nachstehende, sobald man unter einem ebenen Schnitt eines Kegels jene Kurve versteht, welche von den Treffpunkten aller Kegelerzeugenden mit der schneidenden Ebene gebildet wird.

„Die Centralprojektion eines ebenen Schnittes einer Kegelfläche und die Centralprojektion ihrer (ebenen) Leitkurve sind stets kollinear in bezug auf das Bild des Kegelscheitels als Kollineationscentrum und das Bild der der schneidenden Ebene und der Ebene der Leitkurve gemeinsamen Geraden als Kollineationsachse."

Im Falle einer Pyramide bestimmt man deren Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden unter Anwendung einer durch diese Gerade und den Pyramidenscheitel gelegten Hilfsebene. Der gleichen Methode bedient man sich auch, wenn die Aufgabe vorliegt: die Schnittpunkte einer Kegelfläche (**S**, **L**) mit einer beliebigen Geraden **G** zu bestimmen.

Wir legen diesfalls durch **G** und den Scheitel **S** eine Hilfsebene, welche die Ebene $\mathbf{E_L}$ der Leitkurve **L** in der Geraden **g** schneiden möge. Diese Gerade **g** wird die Leitkurve **L** selbst in einer bestimmten Anzahl von Punkten **a**, **b** . . . treffen. Verbindet man die genannten Punkte mit dem Scheitel **S**, so erhält man jene Kegelerzeugenden **Sa**, **Sb**, . . . , welche der gegebenen Kegelfläche (**S**, **L**) und der Hilfsebene (**S**, **G**) gleichzeitig angehören. Die Punkte **A**, **B** . . . , welche sich als Schnitte dieser Erzeugenden **Sa**, **Sb** . . . mit der Geraden **G** ergeben, sind sodann die gemeinschaftlichen Punkte von **G** und der Kegelfläche (**S**, **L**), also die Schnittpunkte von **G** mit (**S**, **L**).

Hieraus ist unmittelbar zu entnehmen, dass die Anzahl der gemeinschaftlichen Punkte einer Kegelfläche und einer beliebigen Geraden genau mit der Anzahl der Schnittpunkte der Leit-

kurve mit irgend einer Geraden ihrer Ebene übereinstimmt, oder mit anderen Worten:

„Die Ordnungszahl einer Kegelfläche ist stets gleich der Ordnungszahl ihrer ebenen Leitkurve."

Der vorstehende Satz ist übrigens schon in dem früher (§ 260) ausgesprochenen allgemeineren Satze enthalten.

Ist die Leitkurve eines Kegels keine ebene Kurve, so wird der eben bewiesene Satz (wenn die „Ordnung" einer Raumkurve als die Anzahl ihrer Schnittpunkte mit einer Ebene definiert wird) im allgemeinen seine Gültigkeit beibehalten; im besonderen jedoch kann es vorkommen, dass bestimmte gegenseitige Lagen von Kegelscheitel und Leitkurve die Ordnung der Kegelfläche erniedrigen. Beispielsweise mag hier nur erwähnt werden, dass, sobald die Leitkurve einer Kegelfläche eine Raumkurve **n**-ter Ordnung ist, und der Kegelscheitel insbesondere mit einem Punkte dieser Kurve zusammenfällt, die Ordnung der Kegelfläche durch die Zahl (**n** — 1) ausgedrückt erscheint.

§ 267.

Sei wieder **S** [Fig. 209, Taf. XIV] der Scheitel, und **L** eine ebene Leitkurve einer Kegelfläche (**S**, **L**); stelle ferner **P** einen beliebigen Punkt dieser Kegelfläche, und **SP** = **g** die durch denselben gehende Erzeugende vor.

Ist die Tangentialebene der Kegelfläche in dem Punkte **P** zu bestimmen, so wird man vor allem den an früherer Stelle (§ 262, Satz 2) bewiesenen Satz zu beachten haben, nach welchem die verlangte Tangentialebene notwendig die durch **P** gehende Erzeugende **g** = **SP** enthalten muss. Zur weiteren Bestimmung der besagten Ebene wird es genügen, die Tangente **T** einer auf der Kegelfläche durch den Punkt **P** gehenden Kurve **C** in dem bezeichneten Punkte zu ermitteln.

Nachdem diese Tangente **T** mit der Kurve **C**, also auch mit der Kegelfläche, ausser dem gegebenen Punkte **P** noch einen diesem Punkte unendlich nahen Punkt **P'** enthält, so folgt unmittelbar, dass die durch **g** und **T** bestimmte Tangentialebene ausser der Erzeugenden **g** auch noch jene Erzeugende **g'** enthalten muss, welche der erstgenannten **g** unendlich nahe liegt und sich als die Verbindungsgerade des Kegelscheitels **S** mit dem Punkte **P'** ergibt.

Hieraus folgt die wesentliche, für jede Kegelfläche gültige Eigenschaft, dass die Tangentialebene (**g**, **T**) die Fläche nicht nur im Punkte **P**, sondern in allen Punkten der Erzeugenden **g** berührt.

Betrachten wir, um dies nachzuweisen, beispielsweise den der Erzeugenden **g** und der Leitkurve **L** gemeinschaftlichen Punkt **p**.

Die vorgenannte Tangentialebene (**g**, **T**) schneidet die Ebene E_L der Leitkurve in einer Geraden **t**, welche notwendig durch die Schnittpunkte **p** und **p'** der Ebene E_L mit den beiden in der Tangentialebene liegenden Erzeugenden **g** und **g'** gehen muss. Nachdem aber diese Erzeugenden unendlich nahe aneinander liegen, gilt dasselbe auch von den beiden Punkten **p** und **p'**, welche die genannten Erzeugenden mit der Leitkurve **L** gemein haben; die Gerade **t** stellt mithin die Tangente der Leitkurve **L** im Punkte **p** vor.

Wollte man also direkt die Tangentialebene der Kegelfläche im Punkte **p** konstruieren, so könnte man zu ihrer Bestimmung sofort die eben gefundene Tangente **t** und die Erzeugende **g** benützen. Hieraus folgt aber, dass die sich so ergebende Tangentialebene mit der früher ermittelten (**g**, **T**) identisch ist. Es gilt sonach der Satz:

„Jede Tangentialebene einer Kegelfläche berührt die letztere in allen Punkten einer Erzeugenden.“

Die Erzeugende, längs welcher die Berührung stattfindet, heisst die *„Berührungserzeugende“* der Tangentialebene, und ist strenge genommen als die Vereinigung zweier unmittelbar aufeinander folgenden Kegelerzeugenden aufzufassen.

Eine wichtige konstruktive Verwertung des eben bewiesenen Satzes besteht darin, dass man, um die Tangentialebene eines Kegels in einem seiner Punkte **P** zu konstruieren, nicht erst nötig hat, eine durch **P** gehende Kurve **C** und deren Tangente zu bestimmen, sondern einfach die Tangentialebene als jene Ebene ermittelt, welche durch die den Punkt **P** enthaltende Kegelerzeugende **g** und nebstbei durch die Tangente **t** der Leitkurve **L** in dem der genannten Erzeugenden angehörenden Punkte **p** geht.

Eine weitere Eigenschaft ergibt sich bezüglich der in einer Kegelberührebene liegenden Geraden.

Da nämlich eine Kegeltangentialebene stets zwei unmittelbar aufeinander folgende Erzeugenden **g** und **g'** enthält, so wird eine in ihr liegende Gerade mit diesen beiden Erzeugenden, also auch

mit der Kegelfläche selbst zwei unendlich nahe Punkte gemein haben; diese Gerade wird also notwendig eine Tangente der Kegelfläche vorstellen, den Fall ausgenommen, in welchem die Gerade insbesondere durch den Kegelscheitel geht. Mithin besteht der Satz:

„Jede Gerade in einer Tangentialebene eines Kegels berührt, sofern sie nicht durch den Kegelscheitel geht, den Kegel in jenem Punkte, in welchem sie die Berührerzeugende der genannten Tangentialebene trifft.“

Aus diesem Satze ist sofort zu entnehmen, dass man durch eine Gerade an eine Kegelfläche im allgemeinen keine Berührebene legen kann, und dass die Möglichkeit der Führung einer Tangentialebene die besondere Voraussetzung erheischt, dass die besagte Gerade entweder durch den Kegelscheitel geht, oder aber selbst eine Tangente der Kegelfläche repräsentiert.

§ 268.

Hingegen gibt es stets (reelle oder imaginäre) Tangentialebenen eines Kegels (**S**, **K**) [Fig. 209, Taf. XIV], welche nebstbei durch einen der Kegelfläche nicht angehörenden Punkt **M** gehen.

Da jede Tangentialebene des Kegels notwendig den Scheitel **S** des letzteren enthält, so werden insbesondere die durch **M** gehenden Tangentialebenen des Kegels die Gerade **SM** enthalten müssen; die Schnittgerade der besagten Kegelberührebene mit der Ebene E_L der Leitkurve des Kegels muss sonach durch jenen Punkt **m** gehen, in welchem die Ebene E_L von der Geraden **SM** getroffen wird.

Anderseits ist aber, wie vorher gezeigt wurde, die Schnittgerade der Ebene E_L mit jeder Tangentialebene des Kegels eine Tangente der Leitkurve **L**. Hiernach werden die durch **M** gehenden Tangentialebenen des Kegels nur jene Ebenen sein können, welche durch den Kegelscheitel **S** und durch die vom Punkte **m** ausgehenden Tangenten $t, t_1, \ldots$ der Leitkurve **L** gehen.

Gleichzeitig gelangen wir zu dem Resultate, dass die Anzahl der durch einen beliebigen Punkt **M** gehenden Tangentialebenen eines Kegels der Anzahl der durch einen Punkt **m** gehenden Tangenten seiner Leitkurve gleich sei, also mit der Klassenzahl dieser Leitkurve übereinstimmt.

Aus diesen Betrachtungen geht weiter hervor, dass sich in bezug auf die Tangentialebenen die Kegelflächen anders verhalten, wie krumme Flächen im allgemeinen, und dass diesbezüglich folgende Unterschiede auftreten.

Während die Tangentialebene einer krummen Fläche im allgemeinen diese letztere nur in einem Punkte berührt, besitzt eine Kegelberührebene unendlich viele Berührungspunkte.

An eine krumme Fläche im allgemeinen lassen sich durch einen Punkt im Raume unendlich viele Berührebenen legen, deren Berührungspunkte die diesem Punkte entsprechende Berührungskurve bilden. An eine Kegelfläche hingegen kann durch einen Punkt im Raume nur eine endliche Anzahl von Berührungsebenen gelegt werden. (Unter Umständen kann man allerdings die Gesamtheit der „Berührerzeugenden" dieser Tangentialebene als die dem genannten Punkte entsprechende „Berührungskurve" auffassen.)

Ferner kann an eine allgemeine krumme Fläche durch eine beliebige Gerade im Raume eine endliche Anzahl von Tangentialebenen geführt werden; an eine Kegelfläche dagegen wird unter den gleichen Umständen im allgemeinen keine Berührungsebene möglich sein.

Dieses besondere Verhalten der Kegelflächen ist allen aufwickelbaren Flächen gemeinsam. Wir werden an späterer Stelle darauf zurückkommen.

Gleichzeitig sei hier bemerkt, dass im Falle einer Kegelfläche die Anzahl der durch einen Punkt ausserhalb der Fläche gehenden Tangentialebenen als die *„Klassenzahl"* der Kegelfläche definiert wird. Wie vorher gezeigt wurde, ist daher die Klassenzahl einer Kegelfläche stets gleich der Klassenzahl ihres ebenen Schnittes oder, was dasselbe aussagt, ihrer ebenen Leitkurve.

§ 269.

Nachdem sich eine Cylinderfläche von einer Kegelfläche nur dadurch unterscheidet, dass ihr Scheitel ein unendlich ferner Punkt ist, so werden alle bezüglich der Kegelflächen gepflogenen Erörterungen und bewiesenen Eigenschaften, da selbe durchwegs projektivischer Natur sind, ohne weiteres auch für Cylinderflächen gelten.

Zu bemerken wäre allenfalls noch, dass ebenso wie eine Kegelfläche als Pyramide, auch eine Cylinderfläche als ein Prisma betrachtet werden könne, sobald man die Leitkurve als ein Polygon von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten auffasst.

Einen (allerdings unwesentlichen) Unterschied zeigen die Kegel- und Cylinderflächen mit Rücksicht auf die unendlich fernen Punkte ihrer ebenen Schnitte.

Ein ebener Schnitt einer Kegelfläche kann unendlich ferne Punkte besitzen, ganz gleichgültig, ob der Leitkurve des Kegels unendlich ferne Punkte zukommen oder nicht.

Nachdem nämlich die Schnittkurve des Kegels mit irgend einer Ebene den geometrischen Ort der Schnittpunkte dieser Ebene mit allen Kegelerzeugenden repräsentiert, so wird es, um unendlich ferne Punkte der Schnittkurve zu erhalten, genügen, die Lage der schneidenden Ebene so zu wählen, dass sie zu einer, zwei oder mehreren Kegelerzeugenden parallel ist.

Die Asymptote eines solchen unendlich fernen Punktes der Schnittkurve muss als Tangente der letzteren [nach früheren Erörterungen (§ 267)] in der Tangentialebene der Kegelfläche in dem unendlich fernen Punkte, d. i. in derjenigen Tangentialebene liegen, deren Berührungserzeugende die zur schneidenden Ebene parallele Kegelerzeugende ist. Es gilt daher der Satz:

„Die Asymptoten eines ebenen Schnittes einer Kegelfläche sind die Schnittgeraden der schneidenden Ebene mit jenen Tangentialebenen des Kegels, deren Berührungserzeugenden zur schneidenden Ebene parallel sind."

Hat man es aber insbesondere mit einer Cylinderfläche zu thun, so ist zu unterscheiden, ob die Leitkurve unendlich ferne Punkte besitzt oder nicht. Im letzteren Falle hat die Cylinderfläche einen einzigen unendlich fernen Punkt, d. i. ihren im Unendlichen liegenden Scheitel. Ein ebener Schnitt kann daher, sofern er nicht lediglich aus Erzeugenden besteht, keine unendlich fernen Punkte besitzen.

Hat hingegen die Leitkurve des Cylinders selbst n unendlich ferne Punkte, so besitzt die Cylinderfläche n Erzeugende, welche ganz im Unendlichen liegen; es sind dies die Verbindungsgeraden der genannten n unendlich fernen Punkte mit dem gleichfalls unendlich fernen Cylinderscheitel. In diesem Falle hat auch jeder ebene Schnitt n unendlich ferne Punkte, und

zwar die gemeinschaftlichen Punkte der schneidenden Ebene und der vorgenannten n unendlich fernen Cylindererzeugenden. Es besteht mithin der Satz:

„Sämtliche ebene Schnitte einer Cylinderfläche haben stets gleich viele reelle unendlich ferne Punkte.“

XIII. Kapitel.

Kegel- und Cylinderflächen zweiten Grades.

§ 270.

Wird als Leitkurve einer Kegelfläche eine Kurve **K** zweiten Grades [Fig. 210, Taf. XIV] angenommen, so ist diese Kegelfläche sowohl von der zweiten Ordnung als auch von der zweiten Klasse (da nach den Betrachtungen in § 266 und 268 die Ordnungszahl sowohl, als auch die Klassenzahl einer Kegelfläche mit den gleichnamigen Zahlen ihrer Leitkurve übereinstimmen). Eine solche Kegelfläche pflegt man daher kurz als einen *„Kegel zweiten Grades“* zu bezeichnen.

Die wichtigsten Eigenschaften dieser Kegelflächen ergeben sich unmittelbar aus den polaren Eigenschaften der Kurven zweiten Grades, indem man gleichzeitig in Berücksichtigung zieht, dass je zwei ebene Schnitte einer Kegelfläche überhaupt (nach den Definitionen in § 192) perspektivisch kollinear sind. Hierbei vertritt der Kegelscheitel die Stelle des Kollineationscentrums, während die gemeinsame Gerade beider Ebenen die Kollineationsachse repräsentiert.

Es werden sodann (Satz in § 194) Gebilden in der einen schneidenden Ebene, welche mit der in dieser Ebene liegenden Schnittkurve des Kegels einen bestimmten projektivischen Zusammenhang besitzen, in der zweiten schneidenden Ebene wieder Gebilde kollinear entsprechen, welche mit der in dieser Ebene liegenden Schnittkurve den gleichen projektivischen Zusammenhang aufweisen.

Um zu bestimmten Resultaten zu gelangen, setzen wir voraus, **S** [Fig. 210, Taf. XIV] sei der Scheitel eines Kegels zweiten Grades und **K** die Kurve zweiten Grades, welche sich als Schnitt

des Kegels mit der Ebene E_L ergibt. Diese Kurve können wir gleichzeitig als die Leitkurve des Kegels betrachten. Ferner sei **P** ein beliebiger Punkt in der Ebene E_L und **p** seine Polare in bezug auf die Kurve **K**. Die Gerade, welche **P** mit dem Kegelscheitel **S** verbindet, wollen wir mit **D** und die Ebene, welche durch die Polare **p** und den Kegelscheitel **S** bestimmt ist, mit **d** bezeichnen.

Denken wir uns nun einen beliebigen Punkt **P'** von **D** mit einem beliebigen Punkte Π' der Ebene **d** durch eine Gerade **g'** verbunden, und bestimmen (§ 266) die Schnittpunkte **A'** und **B'** dieser Geraden mit der Kegelfläche unter Anwendung einer durch **g'** und den Kegelscheitel **S** gelegten Hilfsebene. Nachdem die besagte Hilfsebene auch die Gerade **D** enthält, muss ihre Schnittgerade γ mit der Ebene E_L durch den Punkt **P** gehen.

Die Gerade γ trifft die Kurve **K** in zwei Punkten **a** und **b**, und die Gerade **p** in einem Punkte π so zwar, dass **a** und **b** durch **P** und π harmonisch getrennt sind.

Die Verbindungsgeraden **Sa** und **Sb** repräsentieren die dem Kegel und der Hilfsebene (**S**, **g'**) gemeinschaftlichen Erzeugenden, und diese treffen die Gerade **g'** in den beiden oberwähnten Schnittpunkten **A'** und **B'**. Ferner ist **S**π die Schnittgerade der Hilfsebene (**S**, **g'**) mit der Ebene **d** = (**S**, **p**); dieselbe muss notwendig den in **d** gewählten Punkt Π' enthalten.

Die Punkte **A'**, **B'**, Π' und **P'** sind die Projektionen der vier Punkte **a**, **b**, π, **P** vom Punkte **S** aus; es sind mithin **A'** und **B'** durch **P'** und Π' harmonisch getrennt. Nachdem aber die beiden Punkte **P'** und Π' auf **D** resp. in **d** beliebig gewählt wurden, so folgt, dass der Punkt **P'** mit jedem beliebigen Punkte der Ebene **d** durch die Kegelfläche harmonisch getrennt werde, oder noch allgemeiner, dass jeder Punkt **P'** von **D** mit jedem Punkte Π' von **d** durch den Kegel (resp. durch dessen Schnittpunkte **A'** und **B'** mit der betreffenden Verbindungsgeraden **P'**Π') harmonisch getrennt ist.

Denken wir uns ferner, dass eine beliebige Ebene **E** den Kegel in einer Kurve **K'**, die Gerade **D** in einem Punkte **P'** und die Ebene **d** in einer Geraden **p'** schneide. Wie soeben bewiesen wurde, ist der Punkt **P'** mit jedem Punkte von **p'** durch den Kegel und insbesondere durch dessen ebenen Schnitt **K'** harmonisch getrennt, oder mit anderen Worten, **p'** ist die Polare von **P'** in bezug auf die Kurve **K'**.

Bezeichnen wir, analog der für Kurven zweiten Grades aufgestellten Definition (§ 152), zwei Punkte, welche, wie P' und Π', durch den Kegel, resp. durch die Schnittpunkte ihrer Verbindungsgeraden mit dem Kegel, harmonisch getrennt sind, als *„konjugierte Punkte“* in bezug auf den Kegel, so lässt sich folgender Satz aussprechen:

„Der geometrische Ort aller Punkte, welche mit einem gegebenen Punkte im Raume in bezug auf einen Kegel zweiten Grades konjugiert sind, ist eine durch den Kegelscheitel gehende Ebene. Die Punkte dieser Ebene sind gleichzeitig auch konjugiert mit allen Punkten jener Geraden, welche den Kegelscheitel mit dem ursprünglich gegebenen Punkte verbindet.“

Jede Gerade, welche durch den Scheitel eines Kegels geht, wird ein *„Durchmesser“* des Kegels, und jede durch den Scheitel gehende Ebene eine *„Durchmesserebene“* oder *„Diametralebene“* des Kegels genannt.

Steht ein Durchmesser mit einer Durchmesserebene eines Kegels zweiten Grades in dem im letzt angeführten Satze ausgedrückten Zusammenhange, so bezeichnet man diese Durchmesserebene als die *„dem Durchmesser konjugierte Durchmesserebene“*.

Die zweite in dem vorstehenden Artikel abgeleitete Eigenschaft liefert den Satz:

„Der Punkt und die Gerade, in welcher ein beliebiger Durchmesser eines Kegels zweiten Grades und die diesem Durchmesser konjugierte Durchmesserebene von einer beliebigen Ebene geschnitten wird, repräsentieren stets den Pol und die Polare in bezug auf jene Kurve zweiten Grades, in welcher die letztgenannte Ebene den Kegel schneidet.“

Hieraus folgt auch umgekehrt, dass, wenn ein Punkt und eine Gerade *„Pol“* und *„Polare“* in bezug auf einen ebenen Schnitt eines Kegels zweiten Grades repräsentieren, die durch die Gerade gehende Durchmesserebene mit dem durch den Punkt gehenden Durchmesser stets konjugiert ist.

§ 271.

Sei wieder S [Fig. 210, Taf. XIV] der Scheitel und K irgend ein ebener Schnitt eines Kegels zweiten Grades. Ferner stelle P einen beliebigen Punkt in der Ebene E_L dieses Schnittes, und p seine Polare in bezug auf die Schnittkurve K vor.

Dies vorausgesetzt ist die durch den Kegelscheitel **S** und die Gerade **p** bestimmte Durchmesserebene (**S**, **p**) = **d** konjugiert mit dem Durchmesser **SP** = **D** des Kegels.

Liegt der Punkt **P** ausserhalb der Kurve **K**, so kann man von demselben zwei reelle Tangenten an **K** führen, deren Berührungspunkte wie bekannt gleichzeitig die Schnittpunkte von **K** mit der Polare **p** sind. Die besagten Punkte haben aber noch eine anderweitige Bedeutung. Zunächst sind ihre Verbindungsgeraden mit dem Kegelscheitel **S** nichts anderes, als die Erzeugenden, in welchen der Kegel von der Durchmesserebene **d** = (**S**, **p**) geschnitten wird, und weiter sind dieselben (nach § 268) die Berührungserzeugenden der durch den Durchmesser **D** = **SP** an den Kegel geführten Tangentialebenen. Hiernach ergibt sich der Satz:

„Können durch einen Durchmesser eines Kegels zweiten Grades zwei reelle Tangentialebenen an den Kegel gelegt werden, so ist diejenige Ebene, welche durch deren beide Berührerzeugenden geht, die jenem Durchmesser konjugierte Durchmesserebene."

In diesem Falle heisst der Durchmesser ein *„ausserhalb"* der Kegelfläche liegender, während er, sobald durch ihn keine reellen Tangentialebenen an die Kegelfläche gelegt werden können, als *„innerhalb"* des Kegels liegend bezeichnet wird.

§ 272.

Ein Durchmesser eines Kegels zweiten Grades soll zu oder mit einem zweiten Durchmesser „konjugiert" heissen, wenn jeder Punkt des einen mit jedem Punkte des zweiten Durchmessers in bezug auf den Kegel konjugiert ist. Aus dieser Definition folgt unmittelbar der Satz:

„Sind zwei Durchmesser eines Kegels zweiten Grades konjugiert, so liegt der eine stets in der dem zweiten konjugierten Durchmesserebene und umgekehrt."

Und weiter:

„Zwei konjugierte Durchmesser eines Kegels zweiten Grades werden von einer beliebigen Ebene in zwei Punkten geschnitten, welche in bezug auf die Schnittkurve des Kegels mit dieser Ebene konjugiert sind."

Nachdem anderseits zwei Durchmesserebenen eines Kegels zweiten Grades dann als konjugiert bezeichnet werden, wenn die eine Ebene durch den der anderen Ebene konjugierten Durchmesser

geht, so folgt aus dieser und der in § 155 aufgestellten Definition mit Rücksicht auf § 270, Satz 2, der Satz:

„Zwei konjugierte Durchmesserebenen eines Kegels zweiten Grades werden von einer beliebigen Ebene in zwei Geraden geschnitten, welche in bezug auf die Schnittkurve des Kegels mit dieser Ebene konjugiert sind.“

In gleicher Weise ergibt der in § 270 aufgestellte Satz 2 in Kombination mit dem Satze 1 in § 153 folgendes Analogon zu dem letzteren:

„Die Schnittgerade zweier beliebigen Durchmesserebenen eines Kegels zweiten Grades ist ein Durchmesser, welcher mit jener Durchmesserebene konjugiert ist, welche die beiden der erstgenannten Durchmesserebenen konjugierten Durchmesser verbindet.“

Ferner erhält man durch Verbindung des Satzes 2 in § 270 und des Satzes 2 in § 153 den nachstehenden Satz:

„Beschreibt ein Durchmesser eines Kegels zweiten Grades ein Strahlenbüschel in irgend einer Durchmesserebene, so dreht sich die ihm konjugierte Durchmesserebene um jenen Durchmesser, welcher der erstgenannten Durchmesserebene konjugiert ist.“

Unter Berücksichtigung des in § 158 angeführten Satzes folgt auch unmittelbar, dass das von der sich drehenden Durchmesserebene erzeugte Ebenenbüschel und das von dem ihr konjugierten Durchmesser beschriebene Strahlenbüschel projektivisch sind.

Dass wir hier zum erstenmal von der Projektivität eines Ebenenbüschels mit einem Strahlenbüschel sprechen, dürfte keine Störung des Zusammenhanges involvieren.

Nachdem das Ebenenbüschel ein Grundgebilde erster Stufe ist, so wird dasselbe von einer beliebigen Ebene in einem Strahlenbüschel, und von einer beliebigen Geraden in einer Punktreihe geschnitten. Ein Ebenenbüschel wird als „projektivisch“ mit irgend einem anderen Grundgebilde bezeichnet, wenn das Büschel oder die Punktreihe, in welchem das Ebenenbüschel von einer Ebene, beziehungsweise von einer Geraden geschnitten wird, mit dem zweiten Grundgebilde projektivisch ist.

Hieraus sind die übrigen projektivischen Beziehungen eines Ebenenbüschels direkt abzuleiten. So werden vier Ebenen in einem solchen Büschel *„harmonisch“* sein, wenn es der Vierstrahl oder der Punktwurf ist, in welchem diese vier Ebenen von einer beliebigen Ebene resp. Geraden geschnitten werden.

Ferner wird man beispielsweise unter einem *„involutorischen“* Ebenenbüschel ein solches verstehen, dessen Schnitt mit einer Geraden resp. mit einer Ebene eine *„involutorische“* Punktreihe resp. ein *„involutorisches“* Strahlenbüschel liefert u. s. w.

§ 273.

In den vorhergehenden Betrachtungen wurde von der im § 270, Satz 2, ausgesprochenen Eigenschaft Gebrauch gemacht, dass jede projektivische resp. polare Beziehung von Durchmessern und Durchmesserebenen einer Kegelfläche zweiten Grades auf eine analoge projektivische resp. polare Beziehung irgend eines ebenen Schnittes des Kegels zurückgeführt werden kann. Auf demselben Wege können auch die folgenden Eigenschaften abgeleitet werden.

Denken wir uns wieder einen Kegel zweiten Grades durch seinen Scheitel **S** [Fig. 210, Taf. XIV] und einen ebenen Schnitt **K** gegeben. Ferner stelle **d** irgend eine Durchmesserebene vor, welche die Ebene E_L der Kurve **K** in der Geraden **p** schneiden möge.

In dieser Durchmesserebene lassen sich unendlich viele Paare konjugierter Durchmesser des Kegels zeichnen.

Ein beliebiges Paar derselben kann man erhalten, wenn man den einen Durchmesser $D_2 = SP_2$ in der Ebene $d = (S, p)$ willkürlich annimmt, und den zweiten Durchmesser als Schnitt dieser Durchmesserebene (S, p) mit der dem Durchmesser D_2 konjugierten Durchmesserebene $d_2 = (S, p_2)$ bestimmt.

Die Schnittpunkte eines jeden derartigen Paares konjugierter Durchmesser mit der Ebene E_L liegen einerseits in der Geraden **p**, und anderseits sind sie (Satz 2 in § 272) konjugierte Punkte in bezug auf die Kurve **K**.

In der Theorie der Kurven zweiten Grades wurde aber nachgewiesen (Satz in § 156), dass sämtliche Paare konjugierter Punkte in der Geraden **p** eine involutorische Reihe bilden, deren Doppelpunkte die (reellen oder imaginären) Schnittpunkte von **p** mit **K** repräsentieren. Da aber je zwei konjugierte Punkte dieser Involution, von **S** aus projiziert, zwei in der Ebene **d** liegende konjugierte Kegeldurchmesser ergeben, so folgt der Satz:

„Alle Paare konjugierter Durchmesser eines Kegels zweiten Grades in einer beliebigen Durchmesserebene des letzteren bilden ein involutorisches Strahlenbüschel, dessen Doppelstrahlen jene beiden (reellen oder imaginären) Erzeugenden sind, in welchen der Kegel von der genannten Durchmesserebene geschnitten wird.“

§ 274.

Ein ähnlicher Satz lässt sich aus dem im § 157 aufgestellten Satze ableiten.

Durch einen beliebigen Durchmesser $D = SP$ eines Kegels (S, K) zweiten Grades [Fig. 210, Taf. XIV] gehen unendlich viele Paare konjugierter Durchmesserebenen. Nach der in § 272 aufgestellten Definition erhält man irgend ein Paar derselben, wenn man eine dieser Durchmesserebenen $d_2 = (S, p_2)$ beliebig durch D legt und die ihr konjugierte Durchmesserebene als jene bestimmt, welche durch den der ersteren konjugierten Durchmesser $D_2 = SP_2$ und durch den gegebenen Durchmesser $D = SP$ geht.

Die Schnittgeraden p_2 und PP_2 zweier solcher konjugierten Durchmesserebenen mit der Ebene E_L sind (§ 272, Satz 3) stets zwei durch den Punkt P gehende, in bezug auf die Kurve K konjugierte Strahlen.

Auf Grundlage des in § 157 angeführten Satzes bilden aber alle Paare durch P gehender in bezug auf K konjugierter Strahlen ein involutorisches Strahlenbüschel, dessen Doppelstrahlen die (reellen oder imaginären) durch P führenden Tangenten der Kurve K sind. Durch Projektion dieses involutorischen Strahlenbüschels vom Kegelscheitel S aus erhält man ein involutorisches Ebenenbüschel, in welchem je zwei konjugierte Ebenen gleichzeitig zwei durch den Durchmesser $D = SP$ gehende, konjugierte Durchmesserebenen des Kegels (S, K) repräsentieren. Es folgt daher der Satz:

„Sämtliche Paare durch einen beliebigen Durchmesser eines Kegels zweiten Grades gehender, konjugierter Durchmesserebenen bilden ein involutorisches Ebenenbüschel, dessen Doppelebenen die beiden (reellen oder imaginären) durch jenen Durchmesser gehenden Kegeltangentialebenen sind."

§ 275.

Besonders bemerkenswert werden alle bisher bewiesenen projektivischen Eigenschaften der Kegel zweiten Grades durch die Spezialisierungen, welche sie infolge der Einführung metrischer Beziehungen erfahren.

Wir wollen in dieser Hinsicht, um den sprachlichen Ausdruck zu kürzen, zunächst noch zwei Definitionen aufstellen.

Eine nicht durch den Kegelscheitel gehende Gerade soll zu einer Durchmesserebene „konjugiert“ heissen, wenn sie zu dem dieser Durchmesserebene konjugierten Durchmesser parallel ist.

Ferner soll eine nicht durch den Scheitel des Kegels gehende Ebene als zu einem Kegeldurchmesser „konjugiert“ bezeichnet werden, wenn sie zu der diesem Durchmesser konjugierten Durchmesserebene parallel ist.

Denken wir uns die Schnittpunkte **A** und **B** einer beliebigen Geraden **g** [Fig. 210, Taf. XIV] mit einem Kegel (**S**, **K**) zweiten Grades bestimmt und führen wir den dieser Geraden **g** parallelen Kegeldurchmesser **D** = **SP**. Die demselben konjugierte Durchmesserebene **d** = (**S**, **p**) ist sodann, nach der obigen Definition, auch mit der Geraden **g** konjugiert und mag von derselben in dem Punkte Π geschnitten werden.

Nach Satz 1 in § 270 sind nun der Punkt Π und der unendlich ferne Punkt der Geraden **g** (nachdem letzterer dem Durchmesser **D** = **SP**, und ersterer der diesem Durchmesser konjugierten Durchmesserebene **d** = (**S**, **p**) angehört) zwei in bezug auf den Kegel konjugierte Punkte; dieselben trennen mithin das Punktepaar **A**, **B** harmonisch. Nachdem aber einer dieser Punkte unendlich fern ist, so halbiert bekanntlich der zweite, Π, die Strecke **AB**. Da in gleicher Weise jede andere zu **SP** = **D** parallele Sehne **g** = **AB** durch den der Ebene **d** = (**S**, **p**) angehörenden Punkt Π halbiert wird, ergibt sich der Satz:

„Die Halbierungspunkte einer Schar paralleler Sehnen eines Kegels zweiten Grades liegen sämtlich in der diesen Sehnen konjugierten Durchmesserebene des Kegels.“

§ 276.

Nehmen wir an, eine beliebige Ebene **E** schneide einen Kegel zweiten Grades in einer Kurve **K**. Die der Ebene **E** parallele Durchmesserebene heisse **d**, und der derselben, also auch der Ebene **E**, konjugierte Durchmesser sei **D**.

Infolge des in § 270 angeführten Satzes 2 wird der Punkt **M**, in welchem der Durchmesser **D** die Ebene **E** schneidet, der Pol jener Geraden **m** in bezug auf die Kurve **K** sein, in welcher die Durchmesserebene **d** die Ebene **E** trifft. Diese Schnittgerade liegt aber zufolge der Parallelität der Ebenen **E** und **d** in unendlicher

Entfernung, daher **M** (§ 177) der Mittelpunkt der Kurve **K** ist. Zu gleichem Resultate gelangen wir bezüglich jeder anderen zur Durchmesserebene **d** parallelen Ebene so zwar, dass der Satz besteht:

„Die Mittelpunkte der Schnittkurven eines Kegels zweiten Grades mit einer Schar paralleler Ebenen liegen auf dem diesen Ebenen konjugierten Kegeldurchmesser."

Aus den in § 274 angestellten Betrachtungen ist bekannt, dass sämtliche Paare konjugierter Durchmesserebenen, welche durch den Durchmesser **D** gehen, die Ebene **E** in jenem polarinvolutorischen Büschel der Kurve **K** schneiden, welches den Punkt **M** zum Scheitel hat, also die Durchmesserinvolution von **K** liefern. Hiernach kann der Satz aufgestellt werden:

„Die Durchmesserinvolution der Kurve zweiten Grades, in welcher eine beliebige Ebene einen Kegel zweiten Grades schneidet, ist der Schnitt dieser Ebene mit jenem involutorischen Büschel konjugierter Durchmesserebenen des Kegels, dessen Achse der mit der schneidenden Ebene konjugierte Kegeldurchmesser ist."

§ 277.

Denken wir uns, so wie vorher, einen Kegel zweiten Grades durch eine beliebige Ebene **E** in einer Kurve **K** zweiten Grades geschnitten, und sei wieder **d** die zu **E** parallele Durchmesserebene, während **D** den derselben konjugierten Kegeldurchmesser vorstelle, welcher, wie gezeigt wurde, durch den Mittelpunkt **M** von **K** geht. Denken wir uns ferner zwei beliebige konjugierte Durchmesser δ_1 und δ_2 der Kurve **K** angenommen. Die unendlich fernen Punkte derselben sind bekanntlich konjugiert in bezug auf die Kurve **K.**

Verbindet man diese beiden unendlich fernen Punkte mit dem Kegelscheitel **S**, d. h. zieht man die beiden zu δ_1 und δ_2 konjugierten Kegeldurchmesser $\mathbf{d}_1$ und $\mathbf{d}_2$, so werden dieselben (nach Satz 2, § 272) konjugierte Kegeldurchmesser repräsentieren, die gleichzeitig in der Durchmesserebene **d** liegen.

In gleicher Weise wird jedes weitere Paar konjugierter Durchmesser der Kurve **K** parallel zu einem Paare konjugierter Kegeldurchmesser in der Durchmesserebene **d** sein. Es besteht mithin der Satz:

„Die Durchmesserinvolution der Schnittkurve eines Kegels zweiten Grades mit einer beliebigen Ebene ist parallel zu der Involution

konjugierter Kegeldurchmesser in der der schneidenden Ebene parallelen Durchmesserebene.“

Aus diesem und auch aus dem vorhergehenden Satze ergibt sich weiter ohne jedwede Schwierigkeit der Satz:

„Jedes Paar konjugierter Durchmesser eines ebenen Schnittes einer Kegelfläche zweiten Grades ist parallel zu einem Paare konjugierter Durchmesser eines beliebigen zweiten Schnittes, welcher zu ersterem parallel geführt wird.“

Zu gleichem Resultate gelangt man übrigens auch, wenn berücksichtigt wird, dass a) zwei parallele Schnitte des Kegels ähnlich gelegene Kurven zweiten Grades sind, und zwei sich ähnlich entsprechende Geraden (§ 196) stets parallel sind, und b) dass projektivische Eigenschaften bei kollinearer, also auch kollinearähnlicher Transformation (§ 194) erhalten bleiben.

§ 278.

Sei **K** der ebene Schnitt eines Kegels zweiten Grades, und $A_1A_2A_3$ irgend ein Polardreieck der Kurve **K**, d. i. ein Dreieck, in welchem je zwei Eckpunkte in bezug auf **K** konjugiert sind, und in welchem jeder Eckpunkt den Pol der gegenüberliegenden Seite repräsentiert.

Zieht man nach den drei Punkten A_1, A_2 und A_3 die Kegeldurchmesser D_1, D_2 und D_3, und führt man durch die drei Geraden A_2A_3, A_3A_1 und A_1A_2 die bezüglichen Kegeldurchmesserebenen d_1, d_2, d_3, so ergibt sich (Satz 2 in § 270; Satz 2 und 3 in § 272), dass je zwei der drei Durchmesser D_1, D_2, D_3 und ebenso je zwei der drei Durchmesserebenen d_1, d_2, d_3 konjugierte Durchmesser beziehungsweise konjugierte Durchmesserebenen des Kegels sind, und dass die Durchmesserebene, welche einem der drei Durchmesser konjugiert ist, durch die beiden anderen Durchmesser bestimmt wird.

Drei in einem derartigen Zusammenhange stehende Durchmesser resp. Durchmesserebenen eines Kegels zweiten Grades bezeichnen wir als *„drei konjugierte Durchmesser“* resp. *„Durchmesserebenen“* oder auch als ein *„Tripel konjugierter Durchmesser“* resp. *„Durchmesserebenen“* und das von ihnen gebildete Dreikant als ein *„Polardreikant“* des Kegels zweiten Grades.

Nachdem wir bereits wissen, dass in der Ebene einer Kurve **K** zweiten Grades unendlich viele Polardreiecke existieren,

so folgern wir unmittelbar daraus, dass auch ein Kegel zweiten Grades unendlich viele Polardreikante besitze.

Ferner wurde (§ 273) nachgewiesen, dass es in jeder Durchmesserebene eines Kegels zweiten Grades unendlich viele Paare konjugierter Durchmesser gebe, und dass dieselben ein involutorisches Strahlenbüschel bilden. Da weiter jeder Durchmesser in der besagten Ebene mit dem der letzteren konjugierten Durchmesser selbst wieder konjugiert ist (Satz 1, § 272), so folgt, dass je zwei einander konjugierte Kegeldurchmesser in der vorgenannten Durchmesserebene mit dem der letzteren konjugierten Durchmesser ein Polardreikant des Kegels ergeben.

Hiernach ist jeder beliebige Durchmesser des Kegels eine gemeinschaftliche Kante unendlich vieler Polardreikante, deren übrige Kantenpaare die Durchmesserinvolution in der dem erstgenannten Durchmesser konjugierten Durchmesserebene bilden.

Ohne besondere Schwierigkeit ist nunmehr auch erkennbar, dass es unendlich viele Polardreikante gibt, in welchen zwei Kanten aufeinander senkrecht stehen.

Da nämlich die Durchmesserinvolution eines Kegels in einer beliebigen Durchmesserebene (§§ 172, 173) stets ein Paar konjugierter rechtwinkliger Strahlen besitzt, so werden diese mit dem der genannten Durchmesserebene konjugierten Durchmesser bereits ein Polardreikant der angedeuteten Art bestimmen.

Würde nebstbei die in Rede stehende Durchmesserebene senkrecht zu dem ihr konjugierten Durchmesser stehen, so wäre das Polardreikant insbesondere ein solches, in welchem je zwei Kanten aufeinander senkrecht sind.

An späterer Stelle werden wir nachweisen, dass jeder Kegel zweiten Grades im allgemeinen ein, aber auch nur ein solches rechtwinkliges Dreikant besitze.

Die drei Kanten desselben heissen die *„Achsen“* des Kegels, und die drei Seitenebenen, d. h. die durch die drei Achsen paarweise bestimmten Ebenen, pflegt man die *„Hauptebenen“*, die *„Achsenebenen“* oder auch die *„Symmetrieebenen“* des Kegels zu nennen.

Jede Achsenebene ist gleichzeitig die zu ihrem senkrechten Kegeldurchmesser konjugierte Durchmesserebene, halbiert (Satz in § 275) die zu ihr senkrechten Sehnen des Kegels, und wird eben aus diesem Grunde auch eine Symmetrieebene des Kegels genannt.

Einige weitere, sich auf die Existenz der drei Achsen gründende Eigenschaften der Kegel zweiten Grades, sowie die besonderen Formen dieser Kegel, werden an späterer Stelle untersucht werden.

§ 279.

Dieselben Eigenschaften, die im Vorhergehenden für Kegelflächen zweiten Grades abgeleitet wurden, behalten, solange sie rein projektivisch sind, ihre Gültigkeit auch für Cylinderflächen zweiten Grades, mit der einzigen unwesentlichen Änderung, dass sämtliche Durchmesser untereinander und zu allen Durchmesserebenen des Cylinders parallel sind.

Sobald jedoch metrische Beziehungen hinzutreten, werden selbstverständlich einige der für Kegel bewiesenen Sätze für Cylinder vollkommen unbrauchbar, wenn nicht an die Stelle gewisser Definitionen andere gesetzt werden.

So wurde beispielsweise (in § 275) die einer beliebigen Geraden in bezug auf einen Kegel zweiten Grades konjugierte Durchmesserebene als jene definiert, welche dem zu der gegebenen Geraden parallelen Kegeldurchmesser konjugiert ist. Ist jedoch die Fläche ein Cylinder, der Scheitel also unendlich ferne, so wird der Cylinderdurchmesser, welcher zu einer gegebenen Geraden parallel sein soll, seiner ganzen Ausdehnung nach in unendlicher Entfernung liegen.

Ferner wurde (in § 275) der einer nicht durch den Scheitel des Kegels gehenden Ebene konjugierte Durchmesser als jener definiert, welcher mit der zur gegebenen Ebene parallelen Durchmesserebene konjugiert ist. Ist dagegen die Fläche ein Cylinder, so wird die durch dessen (unendlich fernen) Scheitel parallel zu einer gegebenen Ebene gelegte Durchmesserebene die unendlich ferne Ebene selbst sein.

Es unterliegt jedoch keiner Schwierigkeit, die aus der unendlich fernen Lage des Scheitels einer Cylinderfläche zweiten Grades entspringenden Eigenschaften derselben abzuleiten.

Bezeichnen wir zu diesem Zwecke irgend einen ebenen Schnitt eines solchen Cylinders mit **K**, den Mittelpunkt desselben mit **M** und die durch **M** parallel zu den Cylindererzeugenden geführte Gerade, welche gleichzeitig einen Durchmesser des Cylinders vorstellt, mit **Z**.

Irgend eine zu der Ebene **E** des Schnittes **K** parallele Ebene **E'** wird den Cylinder in einer Kurve **K'** und die Gerade **Z** in einem Punkte **M'** schneiden. Nachdem man aber infolge der Parallelität aller Cylindererzeugenden die Kurve **K'** als eine blosse Parallelverschiebung der Kurve **K** betrachten kann, so ist offenbar der Punkt **M'**, da er ebenfalls aus **M** durch die besagte Parallelverschiebung abgeleitet gedacht werden kann, der Mittelpunkt von **K'**. Das Gleiche gilt selbstverständlich von allen anderen zur Ebene **E** parallelen Schnitten des Cylinders.

Hieraus folgt sofort, dass die Gerade **Z** den Ort der Mittelpunkte aller zur Kurve **K** (resp. zu deren Ebene **E**) parallelen Schnitten des Cylinders repräsentiert.

Weiter lässt sich zeigen, dass die genannte Gerade **Z** überhaupt die Mittelpunkte aller möglichen ebenen Schnitte des Cylinders enthält, und zwar einfach dadurch, dass man nachweist, dass jede Sehne **A' B'** des Cylinders, welche die Gerade **Z** in einem Punkte **M'** trifft (sonst aber eine ganz beliebige Lage haben kann) in eben diesem Punkte **M'** halbiert wird.

Die durch diese Sehne **A' B'** und die Gerade **Z** gelegte Ebene **d** wird nämlich den Cylinder in den beiden durch die Sehnenendpunkte **A'** und **B'** gehenden Erzeugenden **AA'** und **BB'**, und die Ebene **E** in einem Durchmesser **AB** der Kurve **K** schneiden, dessen Endpunkte **A** und **B** den vorgenannten zwei Erzeugenden angehören. Nachdem nun einerseits **AM** = **BM** ist, und anderseits die drei Geraden **AA'**, **BB'** und **MM'** untereinander parallel sind, folgt, dass auch, wie oben behauptet wurde, **A' M'** = **B' M'** ist. Daher besteht der Satz:

„Die Mittelpunkte sämtlicher ebenen Schnitte einer Cylinderfläche zweiten Grades liegen auf einer bestimmten zu den Cylindererzeugenden parallelen Geraden.“

Diese Gerade pflegt man die *„Achse“* der Cylinderfläche zu nennen und die zu ihr senkrechten ebenen Schnitte als die *„Hauptschnitte“* der Cylinderfläche zweiten Grades zu bezeichnen.

§ 280.

Sei ferner **ab** eine beliebige Sehne eines Cylinders zweiten Grades. Durch diese Sehne denken wir uns irgend eine Ebene **E** gelegt, welche den Cylinder in einer Kurve **K** und die Achse **Z** des Cylinders in dem Mittelpunkte **M** von **K** schneiden möge.

In dieser Ebene können selbstverständlich noch unendlich viele zur Sehne **ab** parallele Sehnen **a' b'**, **a'' b''** . . . der Kurve **K** (und auch des Cylinders) geführt werden. Die Halbierungspunkte aller dieser Sehnen liegen auf dem ihnen konjugierten Durchmesser **D** der Kurve **K**, also auf einer Geraden, welche die Cylinderachse **Z** in dem Punkte **M** trifft.

Denkt man sich nun die Ebene samt den Sehnen **ab**, **a' b'**, **a''b''** . . . und dem Durchmesser **D** stetig parallel zu den Cylindererzeugenden verschoben, so wird man durch diesen Vorgang alle möglichen zu **ab** parallelen Sehnen des Cylinders erhalten und gleichzeitig finden, dass deren Halbierungspunkte sämtlich in der von dem Durchmesser **D** bei der Verschiebung erzeugten und durch die Cylinderachse **Z** gehenden Ebene liegen müssen. Zu einem gleichen Resultate gelangt man für eine Parallelsehnenschar von beliebiger anderer Richtung. Mithin gilt der Satz:

„Die Mittelpunkte aller untereinander parallelen Sehnen eines Cylinders zweiten Grades liegen stets in einer durch die Cylinderachse gehenden Ebene.“

Der Analogie (Satz in § 275) wegen bezeichnen wir diese Ebene als die der Sehnenschar *„konjugierte Durchmesserebene“* des Cylinders. Ohne jedwede Schwierigkeiten gelangt man weiter zu dem Satze:

„Allen Parallelsehnenscharen eines Cylinders zweiten Grades, welche zu einer und derselben zu den Cylindererzeugenden parallelen Ebene parallel sind, ist eine und dieselbe Durchmesserebene des Cylinders konjugiert.“

VII. Abschnitt.

Flächen zweiten Grades.

XIV. Kapitel.

Allgemeine Eigenschaften der Flächen zweiten Grades.

§ 281.

Nach der in § 260 gegebenen Definition verstehen wir unter einer Fläche zweiter Ordnung eine solche, welche von einer beliebigen Geraden in zwei (reellen oder imaginären) Punkten getroffen wird, und deren ebener Schnitt (Satz in § 260) eine Kurve zweiten Grades ist.

Ausser den bereits im vorhergehenden Kapitel besprochenen Kegel- und Cylinderflächen zweiten Grades gibt es selbstverständlich noch anderweitige Flächen zweiter Ordnung, die nun den Gegenstand unserer Besprechung bilden sollen.

Die einfachste und speziellste Fläche dieser Art ist die Kugelfläche; denn, wie schon aus der Elementargeometrie bekannt, wird einerseits eine Kugel von einer Geraden in zwei Punkten (reell oder imaginär) geschnitten, und ist anderseits ihr ebener Schnitt stets ein Kreis, mithin eine Kurve zweiten Grades.

Dass thatsächlich noch andere Flächen zweiter Ordnung existieren müssen, erkennt man sofort, wenn man sich eine Kugel räumlich-kollinear transformiert denkt.

Die bei einer derartigen Transformation hervorgehende Fläche wird infolge der Erhaltung projektivischer Eigenschaften von einer Geraden gleichfalls in zwei (reellen oder imaginären) Punkten geschnitten, wird also wieder eine Fläche zweiter Ordnung sein. Dass dieselbe im allgemeinen nicht wieder eine Kugel sein wird, geht schon daraus hervor, dass einem beliebigen auf

der Kugel liegenden Kreise kollinear im allgemeinen nicht wieder ein Kreis, sondern irgend eine andere Kurve zweiten Grades auf der fraglichen Fläche entsprechen wird.

Ohne uns vorderhand auf die Erzeugung solcher Flächen zweiter Ordnung näher einzulassen, wollen wir zunächst deren allgemeine Eigenschaften — wie selbe aus der Definition und der Thatsache hervorgehen, dass der ebene Schnitt einer solchen Fläche notwendig eine Kurve zweiten Grades sein muss, — entwickeln.

§ 282.

Stelle F_2 [Fig. 211, Taf. XIV] irgend eine Fläche zweiter Ordnung vor, und sei P ein beliebiger, dieser Fläche nicht angehörender Punkt.

Alle durch diesen Punkt P gehenden Strahlen σ_1, σ_2, σ_3 ... treffen die Fläche in zwei (reellen oder imaginären) Punkten A_1, B_1; A_2, B_2; A_3, B_3; .... Untersuchen wir den geometrischen Ort jener Punkte π_1, π_2, π_3 ... auf all diesen Strahlen, welche mit dem Punkte P die betreffenden Punktepaare A_1, B_1; A_2, B_2; A_3, B_3; ... harmonisch trennen, oder, im Sinne früherer Definitionen, untersuchen wir den geometrischen Ort aller Punkte, welche mit P in bezug auf die Fläche F_2 *„konjugiert“* sind.

Zu diesem Zwecke denken wir uns durch P eine beliebige Ebene, etwa diejenige Ebene e_{12} gelegt, welche die beiden Strahlen σ_1 und σ_2 enthält. Die besagte Ebene schneidet die Fläche F_2 in einer Kurve C_{12} zweiter Ordnung, welche selbstverständlich durch die auf den vorgenannten Strahlen σ_1 und σ_2 liegenden Flächenpunkte A_1, B_1, A_2 und B_2 geht. Wenn wir ferner die beiden Punkte π_1 und π_2 auf σ_1 resp. σ_2 bestimmen, welche mit P in bezug auf die Fläche F_2, also auch in bezug auf die Kurve C_{12} konjugiert sind, so erhalten wir als Verbindungsgerade p_{12} derselben bekanntlich die Polare des Punktes P in bezug auf die Kurve C_{12}.

Nun ist aber auch jeder weitere Punkt dieser Polare p_{12} mit dem Punkte P konjugiert in bezug auf die Kurve C_{12}, also auch in bezug auf die Fläche F_2, oder mit anderen Worten, die Polare p_{12} gehört dem zu untersuchenden geometrischen Orte an.

Wählen wir eine zweite beliebige durch P gehende Ebene, beispielsweise die Ebene e_{23}, welche die beiden Strahlen σ_2 und σ_3 enthält, so wird dieselbe die Fläche F_2 in einer Kurve C_{23} zweiten

Grades schneiden, welche durch die den beiden Strahlen σ_2 und σ_3 angehörenden Flächenpunkte A_2, B_2, A_3 und B_3 geht. Die Polare p_{23} des Punktes P in bezug auf die Kurve C_{23} geht durch den bereits früher bestimmten Punkt π_2, welcher mit P das Punktepaar A_2, B_2 harmonisch trennt, und ferner durch den Punkt π_3, welcher mit P das Punktepaar A_3, B_3 harmonisch scheidet. Da diese Polare p_{23} den geometrischen Ort aller jener Punkte repräsentiert, die mit P in bezug auf die Schnittkurve C_{23}, also auch in bezug auf die Fläche F_2 selbst konjugiert sind, so wird dieselbe ebenfalls ein Bestandteil des zu bestimmenden geometrischen Ortes sein.

Der geometrische Ort aller Punkte, welche mit dem festen Punkte P in bezug auf die Fläche F_2 konjugiert sind, enthält also unendlich viele Geraden, d. s. die Polaren des Punktes P in bezug auf alle jene Kurven zweiten Grades, in welchen die Fläche F_2 von den durch P gehenden Ebenen geschnitten wird.

Da ferner die beiden Hilfsebenen e_{12} und e_{23} als zwei ganz beliebig durch P gelegte Ebenen zu betrachten sind, so folgt, dass je zwei dem fraglichen geometrischen Orte angehörende Geraden, wie beispielsweise p_{12} und p_{23}, einen Punkt (π_2) gemein haben müssen.

Es wird sonach jede beliebige dem Orte angehörende Gerade p_{ik}, da sie die beiden gleichfalls dem Orte zukommenden Geraden p_{12} und p_{23} in je einem Punkte treffen muss, in der durch die beiden letztgenannten Geraden p_{12} und p_{23} bestimmten Ebene p liegen.

Umgekehrt wird jede Gerade in der Ebene p, da sie mit jeder der Geraden p_{12} und p_{23} je einen Punkt gemein hat, eine Gerade des Ortes sein. Hieraus folgt aber offenbar, dass die Ebene p selbst der fragliche geometrische Ort ist. Mithin gilt der Satz:

„Der geometrische Ort aller Punkte, welche mit einem gegebenen festen Punkte in bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung konjugiert sind, ist eine Ebene.“

Dem analogen geometrischen Orte eines Punktes in bezug auf eine Kurve zweiten Grades entsprechend, nennen wir diese Ebene die *„Polarebene“* des Punktes P in bezug auf die Fläche F_2 zweiten Grades, und bezeichnen umgekehrt den Punkt P als den *„Pol“* der Ebene p in bezug auf die Fläche F_2.

Die vorangestellte Betrachtung liefert auch unmittelbar den Satz:

„Die Polarebene eines Punktes in bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung wird von einer durch diesen Punkt gehenden Ebene stets in der Polare des letzteren in bezug auf jene Kurve geschnitten, in welcher diese Ebene die Fläche schneidet."

§ 283.

Der der Fläche F_2 [Fig. 211, Taf. XIV] nicht angehörende Punkt P kann gegen dieselbe zweierlei verschiedene Lagen einnehmen. Es können nämlich von dem besagten Punkte aus entweder unendlich viele reelle Tangenten oder gar keine reellen Tangenten an die Fläche gezogen werden.

Setzen wir voraus, dass durch P eine reelle Tangente t an die Fläche F_2 gezogen werden könne und dass r der Berührungspunkt derselben sei.

Jede durch t gelegte Ebene wird sodann die Fläche F_2 in einer Kurve C_{12} zweiten Grades schneiden, die in t eine reelle durch P gehende Tangente besitzt. Dies angenommen muss aber noch eine zweite reelle durch P gehende Tangente der Kurve C_{12}, also auch der Fläche F_2 existieren, und da das Gleiche von jeder anderen durch t gehenden Ebene gilt, so ist einleuchtend, dass, sobald auch nur eine einzige durch P gehende reelle Tangente der Fläche F_2 konstatiert wird, eine unendliche Anzahl solcher Taugenten vorhanden sein muss.

In diesem Falle wird der Punkt P als *„ausserhalb"* der Fläche zweiter Ordnung liegend, in dem Falle jedoch als keine reellen von ihm ausgehenden Flächentangenten möglich sind, als *„innerhalb"* der Fläche liegend, bezeichnet.

Liegt der Punkt P (wie in Fig. 211, Taf. XIV) ausserhalb der Fläche F_2, so kömmt seiner Polarebene p eine sehr wichtige Eigenschaft zu.

Denken wir uns von P aus alle möglichen Tangenten an die Fläche geführt, so bilden dieselben (§ 264) eine Kegelfläche, und ihre Berührungspunkte eine auf der Fläche F_2 liegende Kurve B_p, welche wir als die dem aus P der Fläche umschriebenen Kegel entsprechende Berührungskurve bezeichnet haben.

Wenn durch P [Fig. 211, Taf. XIV] eine beliebige Ebene gelegt wird, welche die Fläche F_2 in einer Kurve C_{12} schneidet, und man zieht von P aus an diese Schnittkurve C_{12} die Tangenten t und t', so werden (§ 264) deren Berührungspunkte r und r' der

obgenannten Berührungskurve B_p angehören. Die Berührungspunkte r und r' sind aber (nach § 152) auch zwei Punkte der Polare p_{12} von P in bezug auf die Kurve C_{12}, gehören mithin auch der Polarebene p an. Nachdem das Gleiche von jeder anderen durch P gelegten Ebene, also von allen möglichen Punkten der Berührungskurve B_p gilt, so gelangen wir zu dem Schlusse, dass die letztgenannte Kurve nur die Schnittkurve der Fläche F_2 mit der Polarebene p sein kann. Man hat demnach den Satz:

„Der aus einem Punkte ausserhalb einer Fläche zweiter Ordnung der letzteren umschriebene Kegel ist vom zweiten Grade; seine Berührungskurve mit der Fläche ist jene ebene Kurve, welche zugleich auch die Schnittkurve der Fläche mit der Polarebene des Punktes repräsentiert.

Liegt der Punkt P innerhalb der Fläche F_2, so kann die Polarebene die Fläche in keinem reellen Punkte treffen. Ein solcher müsste nämlich der Berührungspunkt einer von P ausgehenden Flächentangente sein, was undenkbar ist.

§ 284.

Setzen wir voraus, es sei p die Polarebene irgend eines Punktes P in bezug auf eine Fläche F_2 zweiter Ordnung, und fragen wir, welche Lage die Polarebene p_1 eines zweiten Punktes P_1 annimmt, sobald dieser in der ersten Polarebene p liegend gewählt wird.

Der Punkt P_1 ist als ein Punkt der Polarebene p von P mit dem Punkte P konjugiert in bezug auf die Fläche F_2. Da aber auch umgekehrt die Polarebene p_1 von P_1 den geometrischen Ort der mit P_1 konjugierten Punkte vorstellt, und P ein solcher Punkt ist, so muss die besagte Polarebene durch P gehen. Es besteht mithin der Satz:

„Die Polarebene eines Punktes in bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung, welcher in der Polarebene eines zweiten Punktes liegt, geht durch diesen zweiten Punkt.“

Dieser Satz bildet die Quelle für mehrere andere Sätze, die wir nun näher erörtern wollen.

Vor allem sei untersucht, welchen Zusammenhang die Polarebenen der einzelnen Punkte einer geraden Linie g zeigen.

Nehmen wir auf der besagten Geraden zunächst zwei beliebige Punkte P_1 und P_2 an und denken uns deren Polarebenen

p_1 und p_2 in bezug auf die Fläche F_2 zweiter Ordnung bestimmt. Diese beiden Polarebenen werden sich offenbar in einer Geraden g' schneiden.

Wählen wir nun auf g' einen beliebigen Punkt P'_1, so liegt derselbe gleichzeitig in den beiden Polarebenen p_1 und p_2; seine Polarebene p'_1 in bezug auf die Fläche F_2 muss daher (nach dem eben bewiesenen Satze) sowohl durch P_1, als auch durch P_2 gehen, also auch die Gerade $g = P_1 P_2$ enthalten. In gleicher Weise ergibt sich, dass die Polarebene p'_2 eines beliebigen zweiten Punktes P'_2, und allgemein die Polarebene eines jeden Punktes von g' durch die Gerade g gehe.

Wählen wir weiter auch auf der Geraden g einen beliebigen dritten Punkt P_3, so muss, da dieser Punkt zu gleicher Zeit in den Polarebenen p'_1 und p'_2 der Punkte P'_1 und P'_2 liegt, seine Polarebene p_3, mit Zugrundelegung des vorher bewiesenen Satzes, durch die Punkte P'_1 und P'_2, also auch durch deren Verbindungsgerade g' gehen. Ebenso wird die Polarebene jedes anderen Punktes von g durch g' gehen müssen. Hiernach besteht der Satz:

„Die Polarebenen aller Punkte irgend einer Geraden in bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung gehen durch eine und dieselbe zweite Gerade; und umgekehrt gehen die Polarebenen aller Punkte dieser zweiten Geraden durch die erste Gerade."

Zwei gerade Linien, welche, wie g und g', den eben ausgesprochenen Zusammenhang zeigen, heissen *„zwei konjugierte Polaren"* oder *„zwei konjugierte Geraden"* in bezug auf die Fläche zweiter Ordnung. Auch pflegt man die eine dieser Geraden als die *„Polare"* der anderen in bezug auf die Fläche zu bezeichnen.

§ 285.

Sind g und g' zwei in bezug auf eine Fläche F_2 zweiten Grades konjugierte Polaren, so ist einleuchtend, dass jeder Punkt P von g mit jedem Punkte P' von g' konjugiert sein muss, da die Polarebene von P stets die Gerade g', also auch jeden Punkt P' von g' enthält.

Denken wir uns nun durch die eine der beiden Geraden, beispielsweise durch g, eine Ebene E derart gelegt, dass sie die Fläche F_2 in einer Kurve C_2 schneidet, und bezeichnen wir den Schnittpunkt dieser Ebene mit der zweiten Geraden g' mit G, so wird offenbar dieser Punkt G mit jedem Punkte von g in bezug auf

die Fläche F_2, insbesondere aber auch in bezug auf die Schnittkurve C_2 der letzteren mit der Ebene $E = (G, g)$, konjugiert sein, d. h. G ist der Pol der Geraden g in bezug auf die genannte Schnittkurve C_2. Daher gilt der Satz:

„Wird durch eine von zwei konjugierten Polaren einer Fläche zweiter Ordnung eine Ebene gelegt, so ist ihr Schnittpunkt mit der zweiten Geraden gleichzeitig der Pol der ersten Geraden in bezug auf die Schnittkurve der genannten Ebene mit der Fläche."

§ 286.

Aus dieser Eigenschaft lässt sich auch auf die Lage zweier konjugierten Polaren g und g' gegen die Fläche F_2 schliessen.

Setzen wir voraus, dass die eine Gerade, beispielsweise g, keinen reellen Punkt mit der Fläche F_2 gemein habe. Unter dieser Annahme wird die besagte Gerade offenbar auch mit der Schnittkurve C_2 einer beliebig durch g gelegten Ebene E mit der Fläche F_2 keinen reellen Punkt gemein haben können; ihr Pol G in bezug auf diese Kurve C_2 wird daher notwendig innerhalb der letzteren liegen müssen. Der Pol G, welcher, nach dem vorhergehenden Satze, der Geraden g' angehört, liegt aber dann auch innerhalb der Fläche F_2, woraus folgt, dass die Fläche F_2 von der Geraden g' notwendig in zwei reellen Punkten getroffen wird.

Hätte man hingegen angenommen, dass die Gerade g die Fläche F_2 in zwei reellen Punkten schneidet, so würde man finden, dass die zweite Gerade g' keinen innerhalb F_2 liegenden Punkt G besitzen kann, also die Fläche F_2 in nicht reellen Punkten schneiden muss. Denn, wäre ein innerhalb F_2 liegender Punkt G von g' vorhanden, so würde er einerseits auch innerhalb derjenigen Kurve C_2 liegen müssen, in welcher die durch ihn und die Gerade g gelegte Ebene die Fläche schneidet, und müsste anderseits, nach einem früher angeführten Satze, gleichzeitig auch den Pol von g in bezug auf C_2 repräsentieren, was aber, da der getroffenen Annahme gemäss g mit C_2 zwei reelle Punkte gemein hat, ganz unmöglich ist.

Hieraus entnehmen wir, dass, sobald zwei Geraden g und g' konjugierte Polaren einer Fläche F_2 zweiter Ordnung sind, die eine von ihnen die Fläche notwendig in zwei reellen, die andere hingegen in zwei imaginären Punkten trifft.

Es erübrigt noch die Bedeutung der beiden reellen Schnittpunkte festzustellen.

Setzen wir zu diesem Zwecke voraus, dass g die Fläche nicht reell schneide, mithin die ihr konjugierte Gerade g' mit der Fläche zwei reelle Punkte A und B gemein habe.

Nehmen wir auf g einen beliebigen Punkt P_1 an, so wird dessen Polarebene p_1 durch die Gerade g' gehen und mithin die Fläche F_2 in einer durch die beiden Punkte A und B gehenden Kurve C_2^1 zweiten Grades schneiden, welche gleichzeitig die dem Punkte P_1 entsprechende Berührungskurve repräsentiert. Es ist einleuchtend, dass ebenso die Berührungskurve jedes anderen auf g gewählten Punktes P_2 durch die beiden Punkte A und B gehen muss; diese letzteren werden daher (Satz in § 265) die Berührungspunkte der durch die Gerade g an die Fläche F_2 gelegten Berührebenen repräsentieren. Man erhält demgemäss den Satz:

„Sind zwei Geraden konjugierte Polaren in bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung, so schneidet die eine derselben die Fläche stets in zwei reellen Punkten, die andere hingegen in zwei imaginären Punkten. Gleichzeitig sind die reellen Schnittpunkte der Fläche mit der einen Geraden die Berührungspunkte der durch die andere gehenden Tangentialebenen der Fläche.“

Mit Rücksicht auf die am Schlusse des § 265 gegebene Definition folgt nun auch weiter, dass jede Fläche zweiter Ordnung gleichzeitig eine Fläche zweiter Klasse ist, und mithin als eine Fläche zweiten Grades bezeichnet werden kann.

§ 287.

Seien P_1, P_2 und P_3 irgend drei Punkte im Raume und p_1, p_2, p_3 ihre bezüglichen Polarebenen in bezug auf eine Fläche F_2 zweiten Grades.

Die drei Ebenen p_1, p_2 und p_3 schneiden sich in einem Punkte P', welcher zu gleicher Zeit mit den drei Punkten P_1, P_2 und P_3 konjugiert ist. Der Definition einer Polarebene entsprechend, müssen demnach diese drei Punkte der Polarebene p' des Punktes P' angehören, d. h. die durch die drei Punkte P_1, P_2 und P_3 bestimmte Ebene ist die Polarebene p' selbst. Hiernach besteht der Satz:

„Die Polarebenen dreier Punkte in bezug auf eine Fläche zweiten Grades schneiden sich in einem Punkte, dessen Polarebene

in bezug auf die Fläche die durch jene drei Punkte bestimmte Ebene ist.“

Gemäss der Definition der Polarebene eines Punktes in bezug auf eine Fläche zweiten Grades „als geometrischer Ort aller mit diesem Punkte in bezug auf die Fläche konjugierten Punkte“, muss jedem Punkte im Raume eine reelle Polarebene entsprechen.

Dem eben bewiesenen Satze entnehmen wir aber, dass auch umgekehrt jeder beliebigen Ebene $\mathbf{e}$ im Raume ein Pol entspricht, welcher als Schnitt der Polarebenen dreier beliebig in der Ebene $\mathbf{e}$ gewählten Punkte erhalten wird.

§ 288.

Sei P_1 [Fig. 212, Taf. XIV] ein beliebiger Punkt, p_1 seine Polarebene in bezug auf eine Fläche F_2 zweiten Grades, und P_2 ein beliebiger in dieser Polarebene p_1 willkürlich angenommener zweiter Punkt. Die Polarebene p_2 dieses Punktes P_2 wird (Satz 1, § 284) notwendig durch P_1 gehen und die Ebene p_1 in einer Geraden g_{12} schneiden. Die letztgenannte Gerade wird selbstverständlich (Satz 2, § 284) die der Verbindungsgeraden P_1P_2 konjugierte Gerade repräsentieren. Wählen wir auch noch auf dieser Geraden g_{12} einen dritten beliebigen Punkt P_3, so geht die Polarebene p_3 von P_3 durch die Gerade P_1P_2 und wird die Ebene p_1 in einer durch P_2 gehenden Geraden g_{13} schneiden, welche ihrerseits wieder die Gerade g_{12} (die ebenfalls der Ebene p_1 angehört) in einem Punkte P_4 treffen wird. Die genannte Ebene p_3 wird ferner die durch P_1 gehende Ebene p_2 in der durch P_1 und P_4 gehenden Geraden g_{23} schneiden. Nachdem endlich der Punkt P_4 in den drei Polarebenen p_1, p_2 und p_3 liegt, so wird seine Polarebene p_4 durch die drei Punkte P_1, P_2 und P_3 gehen, somit auch die drei Geraden $P_1P_2 = g_{34}$, $P_1P_3 = g_{24}$ und $P_2P_3 = g_{14}$ enthalten.

Wir haben auf diese Weise ein Tetraeder $P_1P_2P_3P_4$ erhalten, dessen Eckpunkte, Seitenflächen und Kanten folgende Eigenschaften besitzen.

Der Eckpunkt P_1 ist der Pol der gegenüber liegenden Seitenebene $P_2P_3P_4 = p_1$. In gleicher Weise sind die Eckpunkte P_2, P_3, P_4 beziehungsweise die Pole der ihnen gegenüber lie-

genden Seitenflächen $P_1P_3P_4 = p_2$, $P_1P_2P_4 = p_3$ und $P_1P_2P_3 = p_4$ des Tetraeders.

Die beiden einander gegenüber liegenden Kanten $g_{12} = P_3P_4$ und $g_{34} = P_1P_2$ sind konjugierte Polaren, da die erstere die Schnittgerade der Polarebenen p_1 und p_2 der der zweiten Kante g_3g_4 angehörenden Punkte P_1 und P_2 repräsentiert. Ebenso sind die beiden einander gegenüber liegenden Tetraederkanten $g_{13} = P_2P_4$ und $g_{24} = P_1P_3$ und endlich auch die einander gegenüber liegenden Tetraederkanten $g_{14} = P_2P_3$ und $g_{23} = P_1P_4$ konjugierte Polaren in bezug auf die Fläche F_2.

Da je zwei der vier Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 konjugiert in bezug auf die Fläche F_2 sind, so bezeichnen wir sie als *„vier konjugierte Punkte“* oder als ein *„Quadrupel harmonischer Punkte“* in bezug auf die Fläche F_2 und das von ihnen gebildete Tetraeder als ein *„sich selbst konjugiertes Tetraeder“* oder als ein *„Polartetraeder“* der Fläche F_2.

Nachdem wir ferner zwei Ebenen als „konjugiert in bezug auf eine Fläche F_2 zweiten Grades“ definieren, wenn die eine durch den Pol der anderen geht, so pflegt man auch die vier Seitenebenen p_1, p_2, p_3 und p_4 des obigen Tetraeders *„vier konjugierte Ebenen“* oder ein *„Quadrupel harmonischer Ebenen“* in bezug auf die Fläche F_2 zu nennen.

Berücksichtigt man, dass zuerst der Punkt P_1 beliebig gewählt wurde, dass ferner der Punkt P_2 beliebig in der Polarebene p_1 von P_1 und weiter auch der Punkt P_3 willkürlich in der Polare g_{12} von P_1P_2 angenommen wurde, so ist einleuchtend, dass eine Fläche F_2 zweiten Grades unendlich viele Polartetraeder besitzt.

Ein derartiges Tetraeder kann man beispielsweise auch auf nachstehende Art gebildet denken. Man bestimmt zunächst zwei beliebige konjugierte Polaren g_{12} und g_{34} in bezug auf die Fläche F_2 und wählt sodann auf der einen, allenfalls auf g_{12}, irgend zwei bezüglich der Fläche F_2 konjugierte Punkte P_3 und P_4 (indem man etwa P_3 beliebig auf g_{12} annimmt und P_4 als Schnitt von g_{12} mit der Polarebene p_3 von P_3 ermittelt).

Bestimmt man ferner in gleicher Weise auf der anderen Geraden g_{34} zwei beliebige in bezug auf F_2 konjugierte Punkte P_1 und P_2, so ist ersichtlich, dass jeder der gefundenen vier Punkte mit den übrigen drei Punkten konjugiert ist, dass dieselben mithin ein Polartetraeder bestimmen.

Dieser Bildungsweise eines Polartetraeders ist unmittelbar auch zu entnehmen, dass drei Eckpunkte desselben sich stets ausserhalb der Fläche F_2 befinden, der vierte jedoch stets innerhalb der Fläche liegt.

Wir wissen nämlich (Satz, § 286), dass die eine der beiden Geraden g_{12} und g_{34} (in Fig. 212, Taf. XIV die Gerade g_{12}) mit der Fläche F_2 zwei reelle Punkte A und B gemein hat, also teilweise innerhalb der Fläche liegen muss, während die zweite Gerade (g_{34}) ganz ausserhalb der Fläche F_2 liegt. Es werden sich sodann auch die auf g_{34} befindlichen Eckpunkte P_1 und P_2 des Polartetraeders notwendig ausserhalb der Fläche F_2 vorfinden. Was hingegen die beiden auf g_{12} liegenden Eckpunkte P_3 und P_4 betrifft, so müssen dieselben, als konjugierte Punkte, das Punktepaar AB harmonisch trennen, woraus folgt, dass der eine (P_3) ausserhalb AB, also ausserhalb der Fläche, der andere (P_4) innerhalb AB, also innerhalb der Fläche liegen muss. Wir gelangen demnach zu dem Satze:

„Eine Fläche zweiten Grades besitzt unendlich viele Polartetraeder. Drei Eckpunkte eines jeden solchen Tetraeders befinden sich stets ausserhalb der Fläche, während einer stets innerhalb der Fläche liegt.“

Mit Rücksicht auf die in § 283 angestellten Betrachtungen findet man weiter, dass drei Seitenebenen eines Polartetraeders, und zwar die Polarebenen der ausserhalb der Fläche F_2 liegenden Eckpunkte, die Fläche in reellen Kurven zweiten Grades schneiden, die vierte Seitenebene hingegen, als Polarebene des innerhalb liegenden Eckpunktes, mit der Fläche keine reelle Kurve gemein haben kann.

Die Ebene p_1 [Fig. 212, Taf. XIV], welche die drei Eckpunkte P_2, P_3 und P_4 des Polartetraeders enthält, schneidet die Fläche F_2 in der Kurve C_2 zweiten Grades, und da die drei genannten Punkte P_2, P_2, P_4 in bezug auf die Fläche F_2 paarweise konjugiert sind, so sind sie es auch in bezug auf die Kurve C_2; das Dreieck $\mathsf{P}_2\mathsf{P}_3\mathsf{P}_4$ ist mithin ein Polardreieck von C_2.

Denken wir uns allgemeiner durch irgend eine Kante des Polartetraeders, beispielsweise durch $\mathsf{P}_1\mathsf{P}_2$, eine beliebige Ebene E gelegt, welche die gegenüber liegende Kante $\mathsf{P}_3\mathsf{P}_4$ in einem Punkte P^0, und daher das Tetraeder selbst in dem Dreiecke $\mathsf{P}_1\mathsf{P}_2\mathsf{P}^0$ schneiden möge. Die Schnittkurve dieser Ebene E mit der Fläche F_2 heisse etwa C_2^0.

Die beiden Punkte P_1 und P_2 sind als Eckpunkte des Polartetraeders konjugiert in bezug auf die Fläche F_2, also auch in bezug auf die Kurve C_2^0.

Da ferner die beiden einander gegenüber liegenden Tetraederkanten P_1P_2 und P_3P_4 konjugierte Polaren von F_2 vorstellen, so ist jeder Punkt der einen mit jedem Punkte der anderen konjugiert. Dies gilt selbstverständlich auch von dem Punkte P^0, welcher mit P_1 und P_2 konjugiert ist. Als Punkte der Ebene E sind diese Punktepaare aber auch konjugiert in bezug auf die Kurve C_2^0, daher das Dreieck $P_1P_2P^0$ wieder ein Polardreieck der Schnittkurve C^0 ist. Es gilt mithin der Satz:

„Eine beliebig durch eine Kante eines Polartetraeders einer Fläche zweiten Grades gelegte Ebene schneidet die Fläche in einer Kurve zweiten Grades und das Polartetraeder in einem Polardreieck dieser Kurve. Insbesondere ist auch jedes Seitendreieck des Polartetraeders ein Polardreieck der in seiner Ebene liegenden Schnittkurve der Fläche.“

§ 289.

Sei wieder F_2 eine Fläche zweiten Grades, welche von irgend einer Geraden g in zwei (reellen oder imaginären) Punkten A und B getroffen werden möge.

Jedes Paar in bezug auf F_2 konjugierter Punkte P_1 und P_2 dieser Geraden muss, der Definition entsprechend, durch die beiden Punkte A und B harmonisch getrennt sein. Mit Rücksicht auf Satz 2, § 120 findet man daher, dass sämtliche Paare in bezug auf die Fläche F_2 konjugierter Punkte der Geraden g eine involutorische Reihe bilden, deren Doppelpunkte die beiden Punkte A und B sind. Daher besteht der Satz:

„Alle Paare in bezug auf eine Fläche zweiten Grades konjugierter Punkte auf einer beliebigen Geraden bilden eine involutorische Reihe, deren Doppelpunkte die (reellen oder imaginären) Schnittpunkte der Geraden mit der Fläche sind.“

Ein ähnlicher Satz gilt bezüglich der durch irgend eine Gerade g gehenden, in bezug auf eine Fläche F_2 zweiten Grades konjugierte Ebenen, d. h. solcher Ebenenpaare, von welchen die eine Ebene den Pol der anderen enthält.

Vor allem wissen wir (Satz 2, § 284), dass die Pole aller durch g gehenden Ebenen auf der mit g konjugierten Geraden g'

liegen. Sei also p_1 irgend eine durch g gehende Ebene und P_1 ihr Pol auf der Geraden g', so, dass die Ebene p_2, welche durch g und P_1 bestimmt wird, mit der ersten Ebene p_1 konjugiert ist. Die Ebene p_1 schneidet aber die Gerade g' in einem Punkte P_2, welcher offenbar mit dem Punkte P_1 (als Pol der Ebene p_1) konjugiert sein muss.

Hieraus erkennt man, dass zwei durch die Gerade g gehende in bezug auf F_2 konjugierte Ebenen p_1 und p_2 stets durch zwei in bezug auf F_2 konjugierte Punkte P_2 und P_1 von g' gehen.

Da nun, mit Bezug auf den vorher aufgestellten Satz, alle Paare konjugierter Punkte auf g' eine Involution bilden, deren Doppelpunkte die Schnittpunkte A und B von g' mit F_2 sind, so bilden auch alle Paare der durch g geführten konjugierten Ebenen, da sie die genannte Involution projizieren, ein involutorisches Ebenenbüschel, dessen Doppelebenen diejenigen Ebenen sind, welche durch die Doppelpunkte A und B gehen, und mithin (Satz, § 286) die durch g gehenden Tangentialebenen der Fläche repräsentieren. Hieraus folgt demgemäss der Satz:

„Alle Paare durch eine beliebige Gerade gehender, in bezug auf eine Fläche zweiten Grades konjugierter Ebenen, bilden ein involutorisches Ebenenbüschel, dessen Doppelebenen die durch jene Gerade gehenden (reellen oder imaginären) Tangentialebenen der Fläche sind."

§ 290.

Bei den bisher angestellten Betrachtungen wurde stets vorausgesetzt, dass die Punkte, Geraden und Ebenen, deren polare Beziehungen zu einer Fläche F_2 zweiten Grades erörtert wurden, nicht selbst Punkte, Tangenten resp. Tangentialebenen dieser Fläche sind.

Gehen wir nun von dieser letzteren Voraussetzung aus und untersuchen wir, welche besonderen Ergebnisse dieser Annahme entspringen.

Zunächst sei die Polarebene p eines auf der Fläche F_2 liegenden Punktes P zu bestimmen.

Legt man durch P eine beliebige Ebene e, so schneidet diese die Fläche F_2 in einer Kurve C_2 und die verlangte Polarebene p in einer Geraden, welche (Satz 2, § 282) die Polare von P in bezug auf die Kurve C_2 repräsentiert. Da aber der Punkt P selbst

der Kurve C_2 angehört, so kann seine Polare keine andere Gerade, als die Kurventangente t im Punkte P (Satz 1, § 154) sein.

Hieraus ist zu ersehen, dass die Tangente irgend eines ebenen Schnittes durch P, in dem Punkte P selbst stets eine der gesuchten Polarebene angehörende Gerade sei, dass also diese Polarebene nur die Tangentialebene der Fläche F_2 im Punkte P sein kann. Demzufolge besteht der Satz:

„Die Tangentialebene einer Fläche zweiten Grades ist zugleich die Polarebene ihres Berührungspunktes."

§ 291.

Um ferner die konjugierte Gerade g' zu einer Geraden g in bezug auf eine Fläche zweiten Grades zu finden, wenn g diese Fläche F_2 in irgend einem Punkte a berührt, stellen wir folgende Betrachtung an.

Sind zwei Geraden g und g' konjugierte Polaren einer Fläche zweiten Grades, so geht (Satz 2, § 284) die Polarebene eines beliebigen Punktes der einen Geraden durch die andere Gerade.

Wählen wir nun speziell auf der Geraden g deren Berührungspunkt a als Pol, so wird dessen Polarebene, d. i. nach dem letztbewiesenen Satze die Tangentialebene T_a im Punkte a durch die gesuchte Polare g' gehen. Da aber weiter diese Tangentialebene T_a auch durch die Gerade g geht, so wird ihr Pol, d. i. der Punkt a auch ein Punkt von g' sein.

Hieraus folgt, dass die mit der Tangente g konjugierte Gerade g' durch den Berührungspunkt a geht und in der Tangentialebene T_a liegt, mithin eine zweite Tangente der Fläche F_2 im Punkte a repräsentiert.

Um die Lage dieser Geraden noch näher zu kennzeichnen, nehmen wir auf der Tangente g einen ganz beliebigen Punkt P als Pol an. Nachdem dieser Punkt notwendig ausserhalb der Fläche liegt, so wird seine Polarebene p (Satz, § 283) die Fläche F_2 in der Berührungskurve B_p des der Fläche vom Scheitel P aus umschriebenen Kegels schneiden. Da weiter der Punkt a dieser Berührungskurve angehört, so wird ihre Tangente in diesem Punkte der Schnitt der Tangentialebene T_a mit der Polarebene p sein müssen. Die eben genannte Tangente ist aber, als Schnitt der den Punkten P und a von g entsprechenden Polarebenen p und T_a, die der Geraden g konjugierte Gerade g'.

Aus der beliebigen Lage des Punktes P auf g folgt, dass auch die jedem beliebigen anderen Punkte von g entsprechende Berührungskurve durch a gehen und von der Polare g' der Geraden g in diesem Punkte a berührt werden muss. Demzufolge kann der Satz aufgestellt werden:

„Die einer beliebigen Tangente einer Fläche zweiten Grades konjugierte Gerade ist gleichfalls eine Tangente der Fläche in dem nämlichen Punkte; dieselbe repräsentiert gleichzeitig eine gemeinschaftliche Tangente der Berührungskurven der Fläche mit allen aus den Punkten der erstgenannten Tangente der Fläche umschriebenen Kegeln."

§ 292.

Bei der Untersuchung der Kurven zweiten Grades und der Kegelflächen zweiten Grades haben wir durch Zuziehung der unendlich fernen Punkte, Geraden resp. Ebenen aus den polaren Beziehungen besondere, sehr wichtige Eigenschaften abgeleitet. Diesen Weg können wir nun auch bei den Flächen zweiten Grades mit Erfolg einschlagen.

Denken wir uns vor allem als *„Pol"* einen beliebigen unendlich fernen Punkt P_∞ angenommen. Derselbe mag beispielsweise als der gemeinschaftliche unendlich ferne Punkt einer Schar untereinander paralleler Sekanten σ_1, σ_2, σ_3 . . . der Fläche F_2 zweiten Grades gegeben sein. Die Punktepaare, in welchen diese Sekanten die Fläche F_2 schneiden, seien a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3; . . . . Dem unendlich fernen Punkte P_∞ entspricht, ebenso wie jedem anderen Punkte im Raume, eine Polarebene d_p, und diese wird die Sekanten σ_1, σ_2, σ_3, . . . in Punkten π_1, π_2, π_3, . . . schneiden, welche mit P_∞ in bezug auf F_2 konjugiert sind, also beziehungsweise durch die Punktepaare a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3; . . . harmonisch getrennt werden. Mit Rücksicht auf den in § 160 aufgestellten Satz und auf die Lage von P_∞ folgt nun unmittelbar, dass die Punkte π_1, π_2, π_3 . . . die Halbierungspunkte der Sehnen $a_1 b_1$; $a_2 b_2$; $a_3 b_3$ . . . vorstellen. Mithin besteht der Satz:

„Der geometrische Ort der Halbierungspunkte aller untereinander parallelen Sehnen einer Fläche zweiten Grades ist die Polarebene des der Sehnenschar gemeinschaftlichen unendlich fernen Punktes."

Analog der bei Kurven zweiten Grades eingeführten Bezeichnung nennen wir eine derartige Polarebene eine *„Durchmesserebene"* oder eine *„Diametralebene"* der Fläche zweiten Grades,

und bezeichnen sie als die der Sehnenschar σ_1, σ_2, σ_3 . . . *„konjugierte Durchmesserebene“.*

Wie leicht zu erkennen, erfahren die an früherer Stelle für die Lage des Pols **P** im Endlichen bewiesenen Sätze (§ 182, Satz 2, und § 183) formelle Änderungen, welche in den beiden nachstehenden Sätzen ausgesprochen erscheinen.

„Der Schnitt einer Durchmesserebene einer Fläche zweiten Grades mit einer durch ihren unendlich fernen Pol gehenden (d. i. zur halbierten Sehnenschar parallelen) Ebene ist stets ein Durchmesser jener Kurve zweiten Grades, in welcher die Fläche von der letztgenannten Ebene geschnitten wird.“

Und weiter:

„Die Berührungskurve einer Fläche zweiten Grades mit irgend einem derselben umschriebenen Cylinder ist zugleich der Schnitt der Fläche mit jener Durchmesserebene, welche den unendlich fernen Punkt der Cylindererzeugenden zum Pole hat, also die zu diesen Erzeugenden parallelen Flächensehnen halbiert.“

§ 293.

Nehmen wir umgekehrt die unendlich ferne Ebene des Raumes als Polarebene an. Derselben wird, wie jeder anderen im Endlichen liegenden Ebene, ein bestimmter Punkt als Pol bezüglich der Fläche F_2 entsprechen. Bezeichnen wir diesen Punkt mit **M** und führen wir durch denselben einen beliebigen Strahl σ, welcher die Fläche F_2 in **a** und **b** treffen möge, so werden die beiden Punkte **a** und **b** durch **M** und den unendlich fernen Punkt von σ harmonisch getrennt; es wird also **M** (Satz in § 160) wieder den Halbierungspunkt der Strecke **ab** vorstellen müssen.

Nachdem das Gleiche von irgend einem beliebigen anderen durch **M** gezogenen Strahle gilt, so repräsentiert **M** einen Punkt, welcher jede durch ihn gehende Sehne der Fläche F_2 halbiert. Besagter Punkt wird aus diesem Grunde als der *„Mittelpunkt“* der Fläche F_2 zweiten Grades bezeichnet. Man hat daher den Satz:

„Jede Fläche zweiten Grades besitzt einen Mittelpunkt; derselbe repräsentiert den Pol der unendlich fernen Ebene in bezug auf die Fläche.“

Nachdem der Mittelpunkt **M** der Fläche F_2 alle durch ihn gehenden Sehnen der Fläche halbiert, so muss er auch alle in

einer durch ihn gelegten Ebene befindlichen Flächensehnen halbieren.

Die letztgenannten Flächensehnen sind aber auch Sehnen der Kurve zweiten Grades, in welcher die Fläche F_2 von der durch M gelegten Ebene geschnitten wird, daher sich, mit Rücksicht auf § 177, der Satz ergibt:

„Der Mittelpunkt einer Fläche zweiten Grades ist gleichzeitig der Mittelpunkt der Schnittkurve der Fläche mit jeder durch diesen Punkt gehenden Ebene."

In § 292 wurde eine Durchmesserebene einer Fläche zweiten Grades als die „Polarebene eines unendlich fernen Punktes" definiert. Da nun jeder unendlich ferne Punkt selbstverständlich in der unendlich fernen Ebene liegt, so muss (Satz 1, § 284) seine Polarebene, d. i. die Durchmesserebene durch den Pol der unendlich fernen Ebene, oder mit anderen Worten durch den Mittelpunkt M von F_2 gehen. Hiernach gilt der Satz:

„Alle Durchmesserebenen einer Fläche zweiten Grades gehen durch den Mittelpunkt der Fläche."

§ 294.

Wenn man durch den Mittelpunkt M einer Fläche zweiten Grades eine beliebige Gerade D zieht und hierauf durch letztere irgend eine Ebene d legt, so wird diese die Fläche F_2 (auf Grund des vorher angeführten Satzes) in einer Kurve C_2 schneiden, welcher ebenfalls M als Mittelpunkt entspricht, und für welche daher die Gerade D einen Durchmesser repräsentiert. Aus diesem Grunde und aus den in der Folge zu erörternden Ursachen wird jede durch den Mittelpunkt M der Fläche F_2 gehende Gerade D als ein *„Durchmesser"* dieser Fläche bezeichnet.

Um die polaren Eigenschaften eines solchen Durchmessers D festzustellen, haben wir zunächst die demselben in bezug auf die Fläche F_2 konjugierte Gerade kennen zu lernen.

Da D durch den Mittelpunkt M der Fläche, d. i. durch den Pol der unendlich fernen Ebene geht, so muss die mit D konjugierte Gerade (Satz 2, § 284) notwendig in dieser unendlich fernen Ebene liegen, weshalb wir sie kurz mit G_∞ bezeichnen. Diese unendlich ferne Gerade G_∞ kann als die Achse eines Parallelebenenbüschels betrachtet werden. Die Ebenen dieses Büschels mögen die „mit dem Durchmesser D konjugierten Ebenen" heissen.

Ist **E** eine derartige Ebene, C_2 ihre Schnittkurve mit der Fläche F_2 und **O** ihr Schnittpunkt mit dem Durchmesser **D**, so wird (Satz in § 285) der Punkt **O** den Pol der Geraden G_∞ in bezug auf die Kurve C_2, d. i. den Mittelpunkt der letzteren repräsentieren. Dasselbe gilt von jeder anderen zu **E** parallelen, also mit dem Durchmesser **D** konjugierten Ebene.

Nehmen wir ferner an, der Durchmesser **D** schneide die Fläche F_2 in den zwei Punkten **A** und **B**, so werden diese (Satz in § 286) die Berührungspunkte der durch G_∞ gehenden (also dem vorgenannten Parallelebenenbüschel angehörenden) Tangentialebenen der Fläche sein, und wir haben demgemäss den Satz:

„Die Mittelpunkte der Schnittkurven einer Fläche zweiten Grades mit den Ebenen eines beliebigen Parallelebenenbüschels liegen auf dem diesem Büschel konjugierten Flächendurchmesser (oder was dasselbe ist, auf der Polare der unendlich fernen Achse des Ebenenbüschels). Die Tangentialebenen der Fläche in den Endpunkten des genannten Durchmessers sind gleichfalls zwei Ebenen dieses Parallelebenenbüschels."

Unter den Ebenen des Parallelebenenbüschels G_∞ gibt es eine, welche überdies durch den Mittelpunkt **M** der Fläche geht, also eine Durchmesserebene der Fläche vorstellt. Diese Ebene **d** wird „die dem Durchmesser **D** konjugierte Durchmesserebene" genannt.

Auf Grund der in § 284 (Satz 2) und § 292 (Satz 1) aufgestellten Sätze findet man, dass der Pol der Durchmesserebene **d** der unendlich ferne Punkt des Durchmessers **D** sei, dass dieselbe daher alle zu **D** parallelen Flächensehnen halbiert.

Zwischen dem Durchmesser **D** und der ihm konjugierten Durchmesserebene besteht demnach folgende Beziehung, welche als ein Analogon zu der gegenseitigen Beziehung zweier konjugierten Durchmesser einer Kurve zweiten Grades betrachtet werden kann.

„Die zu einem beliebigen Durchmesser einer Fläche zweiten Grades parallelen Sehnen werden von der diesem Durchmesser konjugierten Durchmesserebene halbiert; die letztere enthält auch die Berührungspunkte aller zu dem genannten Durchmesser parallelen Flächentangenten. Umgekehrt enthält der Durchmesser auch die Mittelpunkte aller zu seiner konjugierten Durchmesserebene parallelen ebenen Schnitte, sowie auch die Berührungspunkte der zu dieser Durchmesserebene parallelen Tangentialebenen der Fläche."

§ 295.

Sei **D** irgend ein Durchmesser einer Fläche F_2 zweiten Grades, P_∞ dessen unendlich ferner Punkt und **d** die Polarebene des letzteren, d. i. die dem Durchmesser **D** konjugierte Durchmesserebene. Die unendlich ferne Gerade G_∞ von **d** ist sodann (§ 294) gleichzeitig die Polare des Durchmessers **D**.

Wählen wir einen beliebigen zweiten Flächendurchmesser D_1, welcher mit der Durchmesserebene **d** incident ist, d. h. in derselben liegt. Dieser Voraussetzung entsprechend, wird der unendlich ferne Punkt P^1_∞ der unendlich fernen Geraden G_∞ der Ebene **d** angehören; die Polarebene d_1 von P^1_∞, d. i. die dem Durchmesser D_1 konjugierte Durchmesserebene, muss sodann (Satz 2, § 284) durch die Polare von G_∞, d. i. durch den Durchmesser **D** gehen, oder mit anderen Worten: d_1 und **D** sind gleichfalls incident.

Diesfalls wird auch die unendlich ferne Gerade G^1_∞ von d_1, welche gleichzeitig die Polare des Durchmessers D_1 repräsentiert, durch den unendlich fernen Punkt P_∞ von **D** gehen.

Denken wir uns endlich noch eine dritte Durchmesserebene d_2 durch die beiden Durchmesser **D** und D_1 gelegt, und suchen wir den derselben konjugierten Durchmesser D_2, d. i. die Polare der unendlich fernen Geraden G^2_∞ der Ebene d_2. Da die letztere die Durchmesser **D** und D_1 enthält, so geht ihre unendlich ferne Gerade G^2_∞ durch die unendlich fernen Punkte P_∞ und P^1_∞; es wird sich sonach (Satz 2, § 284) die Polare von G^2_∞ als die Schnittgerade der Polarebene der Punkte P_∞ und P^1_∞, d. i. der beiden Durchmesserebenen **d** und d_1 ergeben. Es gilt folglich der Satz:

„Sind ein Durchmesser und eine Durchmesserebene einer Fläche zweiten Grades incident, so sind auch die dem ersteren konjugierte Durchmesserebene und der der zweiten konjugierte Durchmesser incident. Überdies ist auch die durch diese beiden Durchmesser gehende Durchmesserebene konjugiert mit dem Durchmesser, welcher sich als Schnitt der beiden ersten Durchmesserebenen ergibt.“

Betrachtet man alle diese Durchmesser und Durchmesserebenen etwas näher, so wird man finden, dass sie einen speziellen Fall eines bereits bekannten Gebildes repräsentieren. Nachdem nämlich der Mittelpunkt **M** der Fläche F_2 der Pol der unendlich fernen Ebene ist, und in der letzteren drei Punkte P_∞, P^1_∞ und P^2_∞

von solcher Beschaffenheit bestimmt wurden, dass die drei Geraden $P_\infty M = D$; $P^1_\infty M = D_1$ und $P^2_\infty M = D_2$ beziehungsweise die Polaren der drei Geraden $P^1_\infty P^2_\infty = G_\infty$; $P_\infty P^2_\infty = G^1_\infty$; $P_\infty P^1_\infty = G^2_\infty$ sind, und endlich die drei Ebenen $d = P^1_\infty P^2_\infty M$; $d_1 = P_\infty P^2_\infty M$; $d_2 = P_\infty P^1_\infty M$ beziehungsweise die Polarebenen der drei Punkte P_∞, P^1_∞, P^2_∞ repräsentieren, so ist nach § 288 einleuchtend, dass M, P_∞, P^1_∞ und P^2_∞ die vier Eckpunkte eines besonderen Polartetraeders der Fläche F_2 sind.

Hieraus lassen sich nun weitere Eigenschaften leicht ableiten.

Je zwei der drei unendlich fernen Punkte P_∞, P^1_∞ und P^2_∞ sind als Eckpunkte des Polartetraeders konjugiert in bezug auf die Fläche F_2; es können deshalb auch die durch zwei solche Punkte gehenden Durchmesser der Fläche F_2 als *„zwei konjugierte Durchmesser“* von F_2 bezeichnet werden.

Dem vorher bewiesenen Satze, resp. der vorher angestellten Betrachtung gemäss, geht die einem dieser beiden Durchmesser konjugierte Durchmesserebene durch den zweiten Durchmesser und umgekehrt.

Je zwei der drei Durchmesserebenen d, d_1 und d_2 sind ebenfalls konjugiert, da die eine stets den Pol der anderen enthält, mithin auch durch den der anderen Durchmesserebene konjugierten Durchmesser geht.

Die drei Durchmesser der Fläche F_2, welche paarweise konjugiert sind, also drei im Mittelpunkte M zusammentreffende Kanten eines Polartetraeders bilden, pflegt man als *„drei konjugierte Durchmesser“* oder als ein *„Tripel konjugierter Durchmesser“*, und die drei Durchmesserebenen, welche sie paarweise bestimmen, als *„drei konjugierte Durchmesserebenen“* oder als ein *„Tripel konjugierter Durchmesserebenen“* zu bezeichnen.

Wir haben ursprünglich, um drei derartige konjugierte Durchmesser zu bestimmen, den einen — D — willkürlich angenommen, und einen zweiten, — D_1 — in der zu D konjugierten Durchmesserebene d gleichfalls beliebig gewählt. Hieraus folgt, dass eine Fläche zweiten Grades unendlich viele Tripel konjugierter Durchmesser zulasse.

§ 296.

Im Vorhergegangenen wurden zwei konjugierte Durchmesser einer Fläche F_2 als solche definiert, deren unendlich ferne Punkte in bezug auf die Fläche F_2 konjugiert sind. Denken wir uns

nun durch zwei solche konjugierte Durchmesser eine Ebene gelegt, so werden die beiden vorgenannten unendlich fernen Punkte auch in bezug auf die Schnittkurve C_2 der Fläche F_2 mit dieser Ebene konjugiert sein; es werden sonach die beiden durch sie gehenden Flächendurchmesser auch zwei konjugierte Durchmesser der Schnittkurve C_2 repräsentieren. Es besteht mithin der Satz:

„Zwei konjugierte Durchmesser einer Fläche zweiten Grades sind stets auch zwei konjugierte Durchmesser jener Kurve zweiten Grades, in welcher die durch sie bestimmte Ebene die Fläche schneidet."

Nennen wir ferner die Kurve, in welcher eine Fläche zweiten Grades von einer beliebigen, durch ihren Mittelpunkt gehenden Ebene geschnitten wird, kurz einen *„Diametralschnitt"* der Fläche, so erhalten wir durch einfache Umkehrung des eben ausgesprochenen Satzes den folgenden:

„Irgend zwei konjugierte Dnrchmesser eines beliebigen Diametralschnittes einer Fläche zweiten Grades sind stets auch zwei konjugierte Durchmesser der Fläche selbst."

Da ferner jeder Durchmesser in irgend einer Diametralebene mit dem dieser Diametralebene konjugierten Durchmesser konjugiert ist, so ist eine weitere unmittelbare Folge des vorstehenden Satzes:

„Alle Durchmesserpaare einer Fläche zweiten Grades, welche mit einem festen Durchmesser der Fläche je ein Tripel konjugierter Durchmesser ergeben, bilden ein involutorisches Strahlenbüschel, welches mit der Durchmesserinvolution jenes Diametralschnittes, dessen Ebene dem festen Durchmesser konjugiert ist, identisch ist."

§ 297.

Sei P ein beliebiger Punkt ausserhalb einer Fläche F_2 zweiten Grades und p dessen Polarebene in bezug auf diese Fläche.

Die besagte Ebene p schneidet (Satz, § 283) die Fläche F_2 in derjenigen Kurve C_2 zweiten Grades, welche die Berührungskurve des aus P der Fläche umschriebenen Kegels darstellt.

Ziehen wir durch P den Durchmesser $D = MP$ der Fläche F_2, so wird demselben (§ 294) als Polare die unendlich ferne Gerade der Polarebene jedes Punktes dieses Durchmessers D entsprechen. Eine solche Polarebene ist aber die Ebene p des Punktes P selbst; die vorbezeichnete Ebene stellt mithin (gemäss der in § 294

gegebenen Definition) eine dem Durchmesser **D** konjugierte Ebene vor. Dies zu Grunde gelegt ist (Satz in § 294) der Schnittpunkt **O** dieser Ebene **p** mit dem Durchmesser **D** gleichzeitig der Mittelpunkt der vorgenannten in **p** liegenden Berührungskurve C_2. Daher gilt der Satz:

„Der Mittelpunkt der Berührungskurve einer Fläche zweiten Grades mit einem beliebigen derselben umschriebenen Kegel liegt auf dem durch den Kegelscheitel gehenden Flächendurchmesser.“

§ 298.

Kehren wir nun vorübergehend zur Kollineation zweier ebenen Systeme in verschiedenen Trägerebenen zurück, um einen Hilfssatz abzuleiten, der für die Entwickelung einiger weiterer Eigenschaften der Flächen zweiten Grades von besonderem Nutzen ist.

Denken wir uns in zwei verschiedenen Ebenen E_1 und E_2 [Fig. 213, Taf. XIV] zwei Kurven C_1 und C_2 zweiten Grades so angenommen, dass sie die Schnittgerade $A = \Delta\Delta$ der beiden Ebenen E_1 und E_2 in den nämlichen Punkten **m** und **n** treffen, im Übrigen aber beliebige Lagen besitzen.

Es wird sich nun darum handeln, nachzuweisen, dass diese beiden Kurven stets als kollinear verwandt betrachtet werden können, oder mit anderen Worten, dass es stets möglich sei durch beide Kurven zugleich eine Kegelfläche zweiten Grades zu legen.

Dass dies in der That der Fall sei, wird aus folgender Betrachtung hervorgehen.

Setzen wir die beiden Ebenen E_1 und E_2 als Trägerebenen zweier perspektivisch-kollinearen Systeme, ihre Schnittgerade **A** mithin als Kollineationsachse voraus. Die beiden vorgenannten in **A** liegenden Punkte **m** und **n** sind also notwendig sich selbst entsprechende Punkte.

Sollen sich nun in den beiden Systemen die Kurven C_1 und C_2 kollinear entsprechen, so müssen selbstverständlich die Tangenten t_1 und t_2 von C_1 resp. C_2 im Punkte **m**, und ebenso die Tangenten t'_1 und t'_2 von C_1 und C_2 in **n** entsprechende Geraden vorstellen. Dann müssen sich aber auch die beiden Punkte P_1 und P_2, in welchen sich die Tangenten t_1 und t'_1, beziehungsweise die Tangenten t_2 und t'_2 schneiden, d. s. die Pole der Kollinea-

tionsachse A in bezug auf die beiden Kurven C_1 und C_2 entsprechen; ihre Verbindungsgerade P_1P_2 muss somit einen Kollineationsstrahl repräsentieren, oder was dasselbe ist, das Kollineationscentrum enthalten.

Denken wir uns ferner durch die Gerade P_1P_2 eine beliebige Ebene gelegt, etwa jene Ebene γ, welche die Kollineationsachse A in dem Punkte δ schneidet, so werden die Schnitte $g_1 = P_1\delta$ und $g_2 = P_2\delta$ dieser Ebene mit den beiden Ebenen E_1 und E_2 notwendig zwei entsprechende Geraden vorstellen. Die Gerade g_1 möge mit der Kurve C_1 die beiden Punkte a_1 und a'_1, die Gerade g_2 mit der Kurve C_2 die beiden Punkte a_2 und a'_2 gemein haben.

Da P_1 der Pol von A in bezug auf C_1 ist, so sind die beiden Punkte a_1 und a'_1 durch P_1 und δ harmonisch getrennt. In gleicher Weise sind auch die Punkte a_2 und a'_2 durch P_2 und δ harmonisch getrennt, da P_2 den Pol von A in bezug auf C_2 repräsentiert.

Fasst man daher die vier Punkte a_1, a'_1 und a_2, a'_2 als Eckpunkte eines vollständigen Viereckes in der vorgenannten Ebene γ auf, so wird die Gerade P_1P_2 infolge der erwähnten harmonischen Beziehungen die eine Seite des Diagonaldreieckes vorstellen; es müssen demnach auf derselben auch die Schnittpunkte S und S' der Gegenseitenpaare a_1a_2 und $a'_1a'_2$ beziehungsweise $a_1a'_2$ und a'_1a_2 liegen. Überdies sind S und S' durch P_1 und P_2 harmonisch getrennt.

Betrachten wir nun beispielsweise den Punkt S als Kollineationscentrum, so werden den fünf Elementen m, n, a_1, t_1 und t'_1 die fünf Elemente m, n, a_2, t_2 und t'_2 entsprechen. Nachdem aber (Satz, alinea c, § 127) durch die erstgenannten fünf Elemente die Kurve C_1 eindeutig bestimmt ist, durch die anderen fünf Elemente hingegen die Kurve C_2 eindeutig festgestellt erscheint, so müssen sich auch diese (wie ursprünglich behauptet wurde) kollinear entsprechen. Eine zweite kollineare Beziehung vermittelt der Punkt S' als Kollineationscentrum.

Man erkennt sofort, dass die beiden in der Schnittgeraden A der beiden Ebenen E_1 und E_2 liegenden gemeinschaftlichen Punkte m und n der beiden Kurven durchaus nicht reell sein müssen. Dieselben können ebenso gut imaginär sein, und wird man ihr Vorhandensein (Satz, § 156) daran erkennen, dass die Kurven C_1 und C_2 auf der Geraden A dieselbe (elliptische) Polarinvolution

besitzen, deren imaginäre Doppelpunkte eben die gemeinschaftlichen Punkte von C_1 und C_2 sind.

In diesem Falle werden die sich kollinear entsprechenden Pole P_1 resp. P_2 von A in bezug auf die Kurven C_1 und C_2 natürlich innerhalb der letzteren liegen; im übrigen bleibt die vorangestellte Betrachtung unverändert. Wir gelangen somit zu dem Satze:

„Zwei in verschiedenen Ebenen liegende Kurven zweiten Grades, welche mit der Schnittgeraden ihrer Ebenen ein und dasselbe (reelle oder imaginäre) Punktepaar gemein haben, können stets auf zweifache Weise perspektivisch-kollinear aufeinander bezogen werden (auf zweifache Weise als ebene Schnitte eines und desselben Kegels zweiten Grades dargestellt werden). Die betreffenden zwei Kollineationscentra (Kegelscheitel) liegen auf jener Geraden, welche die Pole der gemeinschaftlichen Sekante beider Kurven (in bezug auf diese letzteren) verbindet und sind durch diese Pole harmonisch getrennt.“

Setzt man speziell voraus, dass die beiden Ebenen E_1 und E_2 parallel sind, dass also die Gerade A (Kollineationsachse) und die beiden (reellen oder imaginären) Punkte m und n in unendliche Ferne fallen, so tritt an Stelle der kollinearen Beziehung insbesondere (§ 196) die „kollinear-ähnliche“ oder „perspektivisch-ähnliche“ Beziehung.

In diesem Falle sind die beiden sich ähnlich-kollinear entsprechenden Punkte P_1 und P_2, als Pole der unendlich fernen Geraden, die Mittelpunkte der Kurven C_1 und C_2. Nachdem ferner je zwei sich ähnlich entsprechende Geraden parallel sind, und nebstbei projektivische Eigenschaften durch kollinear-ähnliche Transformation nicht geändert werden, so werden irgend zwei konjugierte Durchmesser von C_2 stets zu zwei konjugierten Durchmessern von C_1 parallel sein. Aus dem vorhergehenden Satze ergibt sich demnach durch die gemachten Voraussetzungen der folgende Spezialsatz:

„Haben zwei Kurven zweiten Grades zwei (reelle oder imaginäre) unendlich ferne Punkte gemein, so können sie stets auf zweifache Weise perspektivisch-ähnlich aufeinander bezogen werden. Hierbei sind die Mittelpunkte der beiden Kurven stets ähnlich entsprechende Punkte, welche die beiden Ähnlichkeitscentra harmonisch trennen. Ferner sind zwei beliebige konjugierte Durchmesser der einen Kurve stets parallel zu zwei konjugierten Durchmessern der zweiten Kurve.“

Wie den (in den §§ 197 und 199) angestellten Betrachtungen zu entnehmen ist, gilt dieser Satz nicht bloss für zwei Kurven zweiten Grades in verschiedenen Ebenen, sondern unmittelbar, ohne jede Anderung, auch für zwei Kurven zweiten Grades in derselben Ebene.

§ 299.

Mittels der im Vorhergehenden bewiesenen Hilfssätze können wir weitere Eigenschaften einer Fläche F_2 zweiten Grades entwickeln.

Setzen wir beispielsweise voraus, die Fläche F_2 würde von zwei beliebigen Ebenen E_1 und E_2 in den beiden Kurven C_1 und C_2 geschnitten. Es ist einleuchtend, dass diese Kurven zwei reelle oder imaginäre Punkte gemein haben müssen, d. s. die beiden Punkte m und n, in welchen die Schnittgerade A der Ebenen E_1 und E_2 die Fläche F_2 trifft.

Auf diese beiden Kurven C_1 und C_2 kann sonach der erste im vorhergehenden Paragraphe abgeleitete Satz angewendet werden. Wir sind somit zur Kenntnis gelangt, dass durch die beiden Kurven C_1 und C_2 zwei verschiedene Kegelflächen zweiten Grades gelegt werden können. Hierbei liegen (wie Satz 1 in § 298 aussagt) die beiden Kegelscheitel S und S' auf jener Geraden, welche die Pole P_1 und P_2 der Geraden A in bezug auf die Kurven C_1 und C_2 verbindet.

Offenbar wird aber die Polarebene des Punktes P_1 in bezug auf die Fläche F_2 die Polare A dieses Punktes bezüglich der Schnittkurve C_1 enthalten (Satz 2, § 282), und ebenso wird die Polarebene des Punktes P_2 durch A gehen. Mit Rücksicht auf frühere Ergebnisse (Satz 2, § 284) folgt weiter, dass die Gerade P_1P_2 die Polare der Geraden A in bezug auf die Fläche F_2 repräsentiert. Es gilt sonach der Satz:

„Durch zwei beliebige ebene Schnitte einer Fläche zweiten Grades können stets zwei Kegelflächen zweiten Grades gelegt werden. Die beiden Kegelscheitel liegen auf der Polare jener Geraden, welche den Ebenen beider Kurven gemeinschaftlich ist, und werden durch die Schnittpunkte der genannten Polare mit den Kurvenebenen harmonisch getrennt.“

Sind die Ebenen der beiden Schnittkurven parallel, so folgt in gleicher Weise unter Anwendung des in § 298 zweitangeführten Satzes der folgende Satz:

„Die Schnitte einer Fläche zweiten Grades mit irgend zwei parallelen Ebenen sind stets zwei perspektivisch-ähnliche Kurven zweiten Grades. Die beiden Ähnlichkeitscentra liegen auf jenem Flächendurchmesser, welcher die Mittelpunkte der zwei Schnittkurven verbindet und werden durch diese Mittelpunkte harmonisch getrennt. Irgend zwei konjugierte Durchmesser der einen Schnittkurve sind stets parallel zu zwei konjugierten Durchmessern der zweiten Schnittkurve.“

§ 300.

Die früheren Spezialisierungen der polaren Eigenschaften einer Fläche zweiten Grades wurden dadurch erhalten, dass wir Punkte, Geraden und Ebenen in unendliche Entfernung verlegten.

Nun wollen wir auch das Verhalten einer Fläche zweiten Grades selbst gegen die unendlich ferne Ebene des Raumes untersuchen.

Eine Fläche zweiten Grades kann von der unendlich fernen Ebene (ebenso wie von jeder anderen Ebene) in einer reellen oder in einer nicht reellen Kurve geschnitten werden.

Ist die unendlich ferne Kurve der Fläche nicht reell, so gibt es auch auf der Fläche keine Kurve, welche reelle unendlich ferne Punkte hat. In diesem Falle sind die ebenen Schnitte der Fläche durchwegs Ellipsen; man bezeichnet deshalb eine solche Fläche zweiten Grades als ein *„Ellipsoid“*. Da in diesem Falle die unendlich ferne Ebene ganz ausserhalb der Fläche liegt, so befindet sich ihr Pol, d. i. der Mittelpunkt des Ellipsoides stets innerhalb des letzteren.

Ist hingegen die Schnittkurve C_∞ einer Fläche zweiten Grades mit der unendlich fernen Ebene reell, so wird dieselbe von einer Ebene in einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel geschnitten, je nachdem die unendlich ferne Gerade der schneidenden Ebene mit der Kurve C_∞ zwei imaginäre oder zwei reelle Punkte gemein hat oder endlich eine Tangente dieser Kurve ist. Eine derartige Fläche zweiten Grades nennen wir ein *„Hyperboloid“*.

Aus dem in § 283 angeführten Satze folgt unmittelbar, dass, sobald eine Fläche F_2 zweiten Grades ein Hyperboloid ist, diese Fläche also eine reelle unendlich ferne Kurve C_∞ besitzt, die

letztere gleichzeitig die Berührungskurve der Fläche mit einem derselben aus dem Mittelpunkte (als Pol der unendlich fernen Ebene) umschriebenen Kegel sein muss.

Denken wir uns durch den Mittelpunkt **M** der Fläche F_2 eine beliebige Ebene **E** gelegt, so wird diese die Kurve C_∞ in zwei reellen oder imaginären. Punkten **m** und **n** schneiden.

Sind diese Punkte reell, so ist die Schnittkurve C_2 der Fläche F_2 mit der Ebene **E** offenbar eine Hyperbel, deren unendlich ferne Punkte **m** und **n** sind. Die Geraden **Mm** und **Mn** repräsentieren, als zwei Erzeugenden des umschriebenen Kegels (M, C_∞), die Tangenten der Schnitthyperbel C_2 in deren unendlich fernen Punkten, sind also die Asymptoten derselben. Das Gleiche gilt von jedem anderen Diametralschnitt des Hyperboloides. Der dem letzteren aus dem Mittelpunkte **M** umschriebene Kegel wird aus diesem Grunde der „*Asymptotenkegel*“ des Hyperboloides genannt. Gleichzeitig erhalten wir den Satz:

„*Jeder reelle Diametralschnitt eines Hyperboloides ist eine Hyperbel, deren Asymptoten die seiner Ebene und dem Asymptotenkegel gemeinschaftlichen Erzeugenden sind.*“

§ 301.

Denken wir uns ein Hyperboloid F_2 und dessen Asymptotenkegel (M, C_∞) durch eine beliebige Ebene **E** beziehungsweise in den Kurven **K** und **k** zweiten Grades geschnitten.

Die Ebene **E** trifft die unendlich ferne Kurve C_∞ des Hyperboloides in zwei reellen oder imaginären Punkten, welche den beiden Kurven **K** und **k** notwendig gemeinschaftlich sind. Nach Satz 2, § 298 und der darauf folgenden Bemerkung sind mithin die beiden Schnittkurven **K** und **k** ähnlich und ähnlich gelegen (kollinear-ähnlich).

Da aber überdies die Fläche und ihr Asymptotenkegel in den beiden genannten unendlich fernen Punkten gemeinschaftliche Berührebenen besitzen, so haben auch die beiden Schnittkurven **K** und **k** in denselben Punkten gemeinschaftliche Tangenten t_∞ und t'_∞, d. s. (nach § 263) die Schnittgeraden der oberwähnten zwei Tangentialebenen mit der Ebene **E**.

Der Schnittpunkt der Tangenten t_∞ und t'_∞ ist der Pol der unendlich fernen Geraden in bezug auf beide Kurven **K** und

k, oder mit anderen Worten: der Pol ist der gemeinschaftliche Mittelpunkt der letzteren.

Nachdem man zwei ähnlich gelegene Kurven zweiten Grades, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt besitzen (der diesfalls offenbar zu gleicher Zeit das Ähnlichkeitscentrum repräsentiert), *„homothetische Kurven“* zweiten Grades nennt, so gelangt man zu dem Satze:

„Ein Hyperboloid und dessen Asymptotenkegel werden von einer beliebigen Ebene stets in homothetischen Kurven zweiten Grades geschnitten.“

§ 302.

Eine Fläche zweiten Grades kann ferner von der unendlich fernen Ebene in einem Punkte berührt werden. Diesfalls ist der Berührungspunkt (Satz, § 290) gleichzeitig der Pol der unendlich fernen Ebene in bezug auf diese Fläche F_2, d. h. der Mittelpunkt derselben.

Eine derartige Fläche zweiten Grades wird ein *„Paraboloid“* genannt. Dasselbe zeigt bezüglich der Durchmesser, der Durchmesserebenen etc. gegenüber den allgemeineren Flächen zweiten Grades dasselbe besondere Verhalten, wie die Parabel zu den allgemeineren Kurven zweiten Grades.

Nachdem der Mittelpunkt in unendlicher Entfernung liegt, so sind einerseits die sämtlichen Durchmesser untereinander parallel, und anderseits sind zu diesen Durchmessern offenbar auch alle Durchmesserebenen parallel. Alle Diametralschnitte werden demgemäss Parabeln sein.

Wären zwei Durchmesser eines Paraboloides konjugiert, so müssten sie auch (Satz 2, § 296) konjugierte Durchmesser jener Parabel sein, in welcher die durch diese Durchmesser bestimmte Ebene das Paraboloid schneidet. Nachdem jedoch eine Parabel (§§ 176 und § 177) keine eigentlichen konjugierten Durchmesser besitzt, sondern jeder Durchmeser mit der unendlich fernen Geraden konjugiert ist, so kann gefolgert werden, dass die jedem Durchmesser eines Paraboloides konjugierte Durchmesserebene die unendlich ferne Ebene des Raumes ist, und dass umgekehrt der einer beliebigen Durchmesserebene konjugierte Durchmesser des Paraboloides in der unendlich fernen Ebene liegt.

Trotz dieses Verhaltens bleiben viele der für die Flächen zweiten Grades allgemein bewiesenen Sätze auch hier gültig. So werden beispielsweise die Mittelpunkte paralleler Sehnen eines Paraboloides stets in einer Durchmesserebene liegen, welch letztere dann als die den genannten Sehnen konjugierte Durchmesserebene des Paraboloides bezeichnet wird.

Weiter liegen die Mittelpunkte der Schnittkurven des Paraboloides mit einer Schar paralleler Ebenen auf einem und demselben Durchmesser, und dieser wird der jener Parallelebenenschar konjugierte Durchmesser des Paraboloides genannt.

Parallel zu einer Ebene, d. i. durch eine unendlich ferne Gerade kann an ein Paraboloid bloss eine einzige im Endlichen liegende Tangentialebene gelegt werden, da die zweite, durch jene unendlich ferne Gerade gehende Berührebene die unendlich ferne Ebene selbst ist, u. s. w. u. s. w.

§ 303.

Unter die Ellipsoide, d. s. jene Flächen zweiten Grades, welche keine reelle unendlich ferne Kurve besitzen, ist auch die *„Kugel“* zu rechnen.

Wie aus der Elementargeometrie bekannt ist, liegen die Mittelpunkte paralleler Sehnen einer Kugel in der zu diesen Sehnen senkrechten Durchmesserebene, und weiter liegen die Mittelpunkte der Schnittkreise einer Kugel mit einer Schar paralleler Ebenen auf dem zu den letzteren senkreehten Kugeldurchmesser.

Hieraus folgt unmittelbar, dass der einer beliebigen Durchmesserebene einer Kugel konjugierte Durchmesser zu der ersteren senkrecht stehe, dass ferner je zwei konjugierte Durchmesser einer Kugel einen rechten Winkel bilden, und weiter, dass je drei konjugierte Durchmesser paarweise aufeinander senkrecht stehen.

§ 304.

Eine weitere höchst wichtige Eigenschaft der Kugel, welche der in Satz 2, § 180 aufgestellten Eigenschaft analog ist, lässt sich aus dieser letzteren ableiten.

Nachdem der Schnitt einer Kugel mit jeder beliebigen Ebene ein (reeller oder imaginärer) Kreis ist, so wird dieselbe auch von der unendlich fernen Ebene des Raumes in einem — selbstverständlich imaginären — Kreise geschnitten werden.

Es lässt sich zeigen, dass die unendlich fernen Kreise aller Kugeln im Raume voneinander nicht verschieden sind, sondern dass im Gegenteil alle Kugeln im Raume durch einen und denselben unendlich fernen imaginären Kreis gehen.

Bezeichnen wir zu diesem Zwecke den unendlich fernen imaginären Kreis irgend einer Kugel **S** mit $\mathbf{K}^{i}_{\infty}$ und denken wir uns diese Kugel **S**, sowie beliebige andere Kugeln im Raume durch eine und dieselbe Ebene **E** geschnitten, so werden wir als Schnittkurven durchwegs Kreise erhalten, welche (Satz 2, § 180) alle durch zwei imaginäre unendlich ferne Punkte, und zwar, wie von selbst einleuchtend, durch die der Ebene **E** und dem imaginären Kreise $\mathbf{K}^{i}_{\infty}$ gemeinschaftlichen Punkte gehen. Diese beiden Punkte werden mithin allen Kugeln angehören.

Nachdem aber die Lage der Ebene **E** ganz beliebig ist, gilt das Gleiche von allen anderen Ebenen, also auch von allen anderen Punkten des Kreises $\mathbf{K}^{i}_{\infty}$. Daher besteht der Satz:

„Sämtliche Kugeln im Raume gehen durch einen und denselben imaginären Kreis in der unendlich fernen Ebene. Die „Kreispunkte" einer beliebigen Ebene sind die gemeinschaftlichen Punkte der letzteren mit diesem imaginären Kreise."

Der in Rede stehende Kreis wird als der *„imaginäre unendlich ferne Kugelkreis des Raumes"* oder kurz als der *„imaginäre Kugelkreis"* bezeichnet.

§ 305.

Denken wir uns im Raume eine beliebige Fläche $\mathbf{F}_2$ zweiten Grades und eine Kugel $\mathbf{S}_2$, deren Mittelpunkt **M** mit jenem der Fläche $\mathbf{F}_2$ zusammenfällt.

In die nachstehende Betrachtung können auch die Kegelflächen zweiten Grades einbezogen werden, und verlegen wir diesfalls den Mittelpunkt der Kugel in den Kegelscheitel.

Denken wir uns irgend drei konjugierte Durchmesser $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$ und $\mathbf{D}_3$ der Fläche $\mathbf{F}_2$ angenommen, so bilden die unendlich fernen Punkte $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ und $\mathbf{P}_3$ der genannten drei Durchmesser (§ 295) und der Mittelpunkt **M** der Fläche $\mathbf{F}_2$ die Eckpunkte eines Polartetraeders von $\mathbf{F}_2$, und sind ferner (Satz 2, § 288) $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ und $\mathbf{P}_3$ die Eckpunkte eines Polardreiecks jener Kurve $\mathbf{C}_\infty$ zweiten Grades, in welcher die Fläche $\mathbf{F}_2$ von der unendlich fernen Ebene geschnitten wird.

Ist die Fläche F_2 eine Kegelfläche, so sind die unendlich fernen Punkte irgend dreier konjugierten Durchmesser derselben (nach § 278) ebenfalls die Eckpunkte eines Polardreieckes jener Kurve, in welcher die unendlich ferne Ebene die Kegelfläche schneidet.

In gleicher Weise werden der Mittelpunkt M der Kugel und die unendlich fernen Punkte irgend dreier konjugierten, d. h. paarweise aufeinander senkrecht stehenden Kugeldurchmesser, Eckpunkte eines Polartetraeders sein, und folglich die unendlich fernen Punkte der drei Durchmesser die Ecken eines Polardreieckes für den imaginären Kugelkreis vorstellen.

Obwohl der Kugelkreis K^i_∞ stets imaginär ist, und auch die unendlich ferne Kurve C_∞ der Fläche F_2 imaginär sein kann, so wollen wir uns dennoch, behufs leichterer Vorstellung, auf Figur 214, Taf. XIV beziehen, in welcher K^i_∞ und C_∞ als reelle Kurven dargestellt erscheinen. Unter der Ebene dieser beiden Kurven (Zeichnungsebene) hat man sich diesfalls gleichzeitig die unendlich ferne Ebene zu denken.

Wie bereits früher gesagt wurde, werden die unendlich fernen Punkte irgend dreier konjugierten Durchmesser von F_2 ein Polardreieck von C_∞, und die unendlich fernen Punkte dreier konjugierten Durchmesser der Kugel ein Polardreieck von K^i_∞ bestimmen.

Umgekehrt wird jedes Polardreieck $P_1P_2P_3$ von C_∞ drei konjugierte Durchmesser von F_2, und jedes Polardreieck $Q_1Q_2Q_3$ von K^i_∞ drei konjugierte Durchmesser der Kugel S_2 bestimmen.

Wie an früherer Stelle (Satz in § 191) gezeigt wurde, werden die beiden Kurven K^i_∞ und C_∞ im allgemeinen ein gemeinschaftliches Polardreieck $Z_1Z_2Z_3$ besitzen, welches gleichzeitig das Diagonaldreieck des von den vier gemeinsamen Punkten m, n, o, p beider Kurven gebildeten vollständigen Viereckes repräsentiert.

Die Punkte Z_1, Z_2 und Z_3 sind mithin die unendlich fernen Punkte dreier Geraden, welche gleichzeitig konjugierte Durchmesser der Fläche F_2 und der Kugel S_2 darstellen, d. h. dreier konjugierten Durchmesser der Fläche F_2, welche paarweise aufeinander senkrecht stehen.

Besagte Durchmesser pflegt man die *„Achsen“* der Fläche zweiten Grades, und die durch dieselben paarweise bestimmten Ebenen die *„Achsenebenen“*, die *„Hauptebenen“* oder *„Symmetrie-*

ebenen" der Fläche zweiten Grades zu nennen. Als Symmetrieebenen werden dieselben deshalb bezeichnet, weil jede von ihnen die zu ihr konjugierten, d. h. zur dritten Achse parallelen, also auf der betreffenden Hauptebene senkrechten Sehnen halbiert.

Wie eingangs bemerkt wurde, gilt das Gesagte nicht nur für Flächen zweiten Grades im allgemeinen, sondern auch für Kegelflächen zweiten Grades.

Nachdem der Kugelkreis K^i_∞ stets imaginär ist, so sind offenbar auch die vier Punkte m, n, o, p, welche den beiden Kurven C_∞ und K^i_∞ gemein sind, immer imaginär. Von den sechs Seiten des vollständigen Viereckes können daher nur zwei gegenüber liegende (beispielsweise die Seiten mn und op) reell sein, während die übrigen notwendig imaginär sein müssen. Denn die Voraussetzung ihrer Realität würde auch die Realität ihrer Schnittpunkte mit den Seiten mn und op, d. i. die der vorgenannten vier Punkte zur Folge haben.

Die beiden reellen Seiten mn und op ergeben den selbstverständlich reellen unendlich fernen Punkt Z_1 der einen Achse. Die übrigen beiden Punkte Z_2 und Z_3 sind, trotzdem sie Schnittpunkte imaginärer Geradenpaare mo und np, beziehungsweise mp und no repräsentieren, ebenfalls reell, wie der folgenden Überlegung entnommen werden kann.

Nachdem durch Z_1 eine reelle Achse der Fläche F_2 bestimmt ist, wird die ihr konjugierte Durchmesserebene als senkrecht zu dieser Achse, eine reelle unendlich ferne Gerade besitzen, welche offenbar keine andere sein kann, als die Polare des Punktes Z_1 in bezug auf die beiden Kurven C_∞ und K^i_∞, d. i. die Gerade Z_2Z_3. Dass in dieser Geraden auch die Punkte Z_2 und Z_3 selbst reell sind, folgt daraus, dass die Durchmesserinvolution in der genannten Achsenebene (d. i. in jener, welche die unendlich ferne Gerade Z_2Z_3 enthält) sowie jede andere Involution notwendig ein reelles Paar konjugierter und gleichzeitig rechtwinkliger Strahlen (Durchmesser) besitzt.

Von Interesse ist auch die Bedeutung der beiden reellen Geraden mn und op.

Die vorbezeichneten Punkte m und n sind einerseits (als Punkte von K^i_∞ und nach Satz in § 304) die Kreispunkte jener Ebenen, welche durch die unendlich ferne Gerade mn gehen, anderseits aber auch Punkte der Fläche F_2. Hieraus folgt unmittelbar, dass diese Ebenen die Fläche F_2 in Kreisen schneiden.

Dasselbe gilt von den Ebenen, welche durch die unendlich ferne Gerade **op** geführt werden. Da die beiden Geraden **mn** und **op** durch Z_1 gehen, so ist einleuchtend, dass die durch sie bestimmten Parallelbüschel von Kreisschnittsebenen zu der Achse MZ_1 parallel sind.

Nachdem ferner die beiden Geraden Z_1Z_2 und Z_1Z_3, das heisst, die unendlich fernen Geraden der beiden durch die Achse MZ_1 gehenden Hauptebenen durch die Geraden **mn** und **op** harmonisch getrennt werden, und da weiter diese beiden Hauptebenen aufeinander senkrecht stehen, so ist leicht zu erkennen (Satz, § 161), dass die Ebenen beider Kreisschnittsscharen sowohl gegen die eine, als auch gegen die andere dieser Hauptebenen gleich geneigt sind. Man hat daher den Satz:

„Jede Fläche zweiten Grades besitzt im allgemeinen drei Achsen und drei Haupt- oder Symmetrieebenen. Die Achsen sind drei konjugierte und gleichzeitig paarweise aufeinander senkrecht stehende Durchmesser der Fläche. Die drei Hauptebenen, welche durch diese Achsen paarweise bestimmt sind, stehen ebenfalls paarweise senkrecht aufeinander.“

„Ferner gibt es zwei Ebenenbüschel, deren Ebenen die Fläche zweiten Grades in Kreisen schneiden. Diese Kreisschnittsebenen sind parallel zu der einen Achse der Fläche, und je zwei von ihnen, welche nicht demselben Büschel angehören, schliessen mit den beiden durch die genannte Achse gehenden Hauptebenen gleiche Winkel ein.“

§ 306.

Die in den Achsenebenen einer Fläche F_2 zweiten Grades liegenden Diametralschnitte werden die *„Hauptschnitte“* der Fläche genannt. Zwei Achsen der Fläche F_2 sind (Satz 1, § 296) gleichzeitig auch die Achsen des in der Ebene der letzteren liegenden Hauptschnittes.

Die drei Achsen der Flächen F_2 besitzen im allgemeinen ungleiche Längen; man bezeichnet daher diese Flächen als *„dreiachsige Flächen zweiten Grades“*.

Die Hauptschnitte können Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln sein, woraus sich folgende Einteilung der Flächen ergibt:

a) *„das dreiachsige Ellipsoid“;* dasselbe besitzt drei ungleiche reelle Achsen **AB, CD, EF** [Fig. 215, Taf. XIV], welche

paarweise (**AB** und **CD**; **AB** und **EF**; **CD** und **EF**) die drei Hauptellipsen H_1, H_2, H_3 bestimmen.

Eine beliebige zu einer der Hauptebenen, beispielsweise zu **CD**, **EF**, parallele Ebene **e** schneidet die beiden Hauptellipsen H_1 und H_2 in zwei Sehnen **cd** und **ef**, welche die Achsen der Schnittellipse **K** der Fläche F_2 mit der Ebene **e** vorstellen. Derartige zu H_3 ähnlich liegende Ellipsen kann man allenfalls als die „Erzeugenden" des Ellipsoides betrachten.

b) *„Das dreiachsige einmantelige Hyperboloid."* Dasselbe besitzt drei ungleiche Achsen **AB**, **CD**, **EF** [Fig. 216, Taf. XIV], von welchen die eine, **AB**, ideell, die beiden anderen, **CD** und **EF** hingegen reell sind, oder mit anderen Worten: zwei der Hauptschnitte sind Hyperbeln H_1 und H_2, welche die Achse **AB** als gemeinschaftliche ideelle Achse, und beziehungsweise **CD** und **EF** als reelle (Brennpunkts-) Achsen besitzen. Der dritte Hauptschnitt ist die durch die Achsen **CD** und **EF** bestimmte Ellipse H_3, welche man die *„Kehlellipse"* des Hyperboloides zu nennen pflegt.

Eine beliebige zu **CDEF** parallele Ebene **e** schneidet wieder die beiden Haupthyperbeln H_1 und H_2 in zwei Sehnen **cd** und **ef**, welche gleichzeitig die Achsen jener Ellipse **K** sind, in welcher die Fläche F_2 von der Ebene **e** geschnitten wird.

c) *„Das dreiachsige zweimantelige Hyperboloid."* Diese Fläche besitzt drei ungleiche Achsen **AB**, **CD**, **EF** [Fig. 217, Taf. XV], wovon die eine **AB** reell, die beiden anderen ideell sind, d. h. zwei der Hauptschnitte H_1 und H_2 sind Hyperbeln, welchen die reelle Achse **AB** und beziehungsweise die ideellen Achsen **CD** und **EF** zukommen.

Der dritte Hauptschnitt, welcher durch die ideellen Achsen **CD** und **EF** bestimmt ist, repräsentiert eine imaginäre Ellipse. Die zu **CDEF** parallelen ebenen Schnitte $K = (cd, ef) \ldots$ sind, wie in den früheren zwei Fällen, Ellipsen.

d) *„Das dreiachsige elliptische Paraboloid."*

Aus vorhergegangenen Betrachtungen (§ 302) ist bekannt, dass der Mittelpunkt eines Paraboloides in unendlicher Entfernung liegt, mithin alle Durchmesser untereinander parallel sind. Das Paraboloid besitzt daher nur eine im Endlichen liegende, zu den genannten Durchmessern parallele Achse, und zwei durch diese Achse gehende, im Endlichen liegende Haupt-



ebenen, während die beiden übrigen Achsen und die dritte Hauptebene im Unendlichen liegen.

Nachdem (§ 302) jede durch einen Durchmesser (beziehungsweise durch die Achse) eines Paraboloides gehende Ebene die Fläche in einer Parabel schneidet, so kann das Paraboloid folgendermassen dargestellt gedacht werden.

Die im Endlichen liegende Achse sei **AZ** [Fig. 218, Taf. XV] und **A** der Endpunkt derselben, welcher den *„Scheitel“* des Paraboloides bildet. Die beiden aufeinander senkrecht stehenden, durch **AZ** gehenden Hauptebenen enthalten als Hauptschnitte des Paraboloides zwei Parabeln H_1 und H_2, welche den gemeinschaftlichen Scheitel **A** besitzen. Hierdurch ist das Paraboloid vollständig bestimmt. Dasselbe kann durch Ellipsen $K = (cd, ef) \ldots$, deren Ebenen zur Achse **AZ** senkrecht stehen, erzeugt werden.

e) *„Das dreiachsige hyperbolische Paraboloid“* unterscheidet sich vom elliptischen Paraboloid dadurch, dass die beiden Hauptparabeln H_1 und H_2 [Fig. 219, Taf. XV] sich zu verschiedenen Seiten ihres gemeinschaftlichen Scheitels **A** erstrecken. Die zur Achse **AZ** senkrechten Schnitte **K**... sind diesfalls ausschliesslich Hyperbeln.

f) *„Der dreiachsige Kegel zweiten Grades.“* Ein Kegel zweiten Grades hat im allgemeinen ebenfalls drei Achsen (§ 278) und wird von jenen Ebenen, die zu der einen Achse senkrecht sind, in Ellipsen, von den Ebenen hingegen, die zur zweiten und dritten Achse normal sind, in Hyperbeln geschnitten.

Einen solchen Kegel kann man daher stets in der Weise darstellen, dass man als Leitkurve desselben eine beliebige Kurve zweiten Grades wählt, durch den Mittelpunkt derselben, senkrecht zu ihrer Ebene eine Gerade (die eine Kegelachse) zieht und auf dieser den Scheitel des Kegels willkürlich annimmt.

§ 307.

Die unendlich ferne Kurve C_∞ einer Fläche zweiten Grades und der unendlich ferne Kugelkreis K^i_∞ (in Fig. 220, Taf. XV sind, zur Erleichterung der Vorstellung, wieder beide Kurven reell dargestellt) können auch eine besondere Lage gegeneinander besitzen, sie können sich also beispielsweise in zwei Punkten **m** und **n** berühren.

Der Schnittpunkt Z_1 der gemeinschaftlichen Tangenten beider Kurven in m resp. n ist sodann (§ 191) ein gemeinschaftlicher Pol, und die Gerade mn selbst ist die ihm entsprechende gemeinschaftliche Polare, d. h. Z_1 ist der unendlich ferne Punkt einer Achse der Fläche, und mn ist die unendlich ferne Gerade der dieser Achse konjugierten, also zu derselben senkrecht stehenden Achsenebene.

Mit Zugrundelegung des § 191 ist ferner bekannt, dass die beiden obbezeichneten Kurven auf der Geraden mn dieselbe Polarinvolution besitzen, und dass irgend zwei konjugierte Punkte derselben, wie beispielsweise Z_2 und Z_3, mit Z_1 stets ein gemeinschaftliches Polardreieck beider Kurven bestimmen. Hieraus folgt, dass zwei derartige konjugierte Punkte Z_2 und Z_3 immer die unendlich fernen Punkte zweier in der Hauptebene Mmn liegenden Achsen MZ_2 und MZ_3 der Fläche sind, diese letztere also in der genannten Hauptebene unendlich viele Achsenpaare besitze.

Berücksichtigt man ferner, dass m und n die „Kreispunkte" der Ebenen repräsentieren, welche durch die unendlich ferne Gerade mn gehen, also zur Hauptebene Mmn parallel laufen, so findet man im Gegensatze zu der in § 305 bewiesenen Eigenschaft, dass im vorliegenden Falle die Fläche zweiten Grades nur von einem Parallelebenenbüschel, und zwar von jenem, dessen Ebenen zur Hauptebene Mmn parallel, zur Achse MZ_1 mithin senkrecht sind, in Kreisen geschnitten wird. Der in der genannten Hauptebene liegende Hauptschnitt ist dann selbst gleichfalls ein Kreis.

Eine weitere Folge hiervon ist, dass alle Diametralschnitte, welche durch die Achse MZ_1 geführt werden, untereinander kongruent sind; denn einerseits haben sie sämtlich die Endpunkte dieser Achse gemein, und anderseits sind ihre zweiten Achsen als Durchmesser des in der Ebene Mmn liegenden Hauptkreises einander gleich.

Diese Flächen können somit durch die Umdrehung einer Kurve zweiten Grades um eine ihrer Achsen erzeugt werden; besagte Flächen sind also: *„Umdrehungs-* oder *Rotationsflächen zweiten Grades"*.

Man unterscheidet demgemäss folgende Formen:

a) Das *„bifokale Ellipsoid"*, erzeugt durch Umdrehung einer Ellipse um ihre Brennpunktsachse;

b) das *„Sphäroid“* entstanden durch Rotation einer Ellipse um ihre Nebenachse;

c) das *„einmantelige Rotationshyperboloid“* durch Umdrehung einer Hyperbel um ihre ideelle Achse;

d) das *„zweimantelige Rotationshyperboloid“* durch Rotation einer Hyperbel um ihre reelle Achse.

e) das *„Rotationsparaboloid“* durch Umdrehung einer Parabel um ihre Achse, und

f) den *„Rotationskegel“* oder den *„geraden Kreiskegel“*, welcher durch Umdrehung einer Geraden um eine zweite die erstere schneidende Gerade entsteht. Sind die beiden Geraden parallel, so entsteht der *„Rotationscylinder“*.

Endlich kann man auch eine Kugel auf unendlich viele Arten durch Rotation eines Kreises um einen seiner Durchmesser erzeugt denken.

§ 308.

Zwei Flächen zweiten Grades F_2 und F'_2 schneiden sich im allgemeinen in einer Raumkurve vierter Ordnung, d. i. in einer Kurve, welche von einer beliebigen Ebene E in vier (reellen oder imaginären) Punkten geschnitten wird. Besagte Ebene E schneidet nämlich die Flächen F_2 und F'_2 in zwei Kurven C_2 und C'_2 zweiten Grades, welche (Satz in § 191) vier (reelle oder imaginäre) Punkte gemein haben. Diese vier Punkte (sonst aber keine) sind offenbar auch der Ebene E und der Schnittkurve der beiden Flächen F_2 und F'_2 gemeinschaftlich.

Die Schnittkurve vierter Ordnung zweier Flächen zweiten Grades kann aber auch in Kurven niederer Ordnung zerfallen, und zwar entweder in eine Gerade und eine Raumkurve dritter Ordnung, oder in zwei Kurven zweiter Ordnung, und es ist klar, dass die Anzahl der Schnittpunkte zweier solcher Teilkurven mit einer beliebigen Ebene ebenfalls gleich vier sein muss.

Dass ein solches Zerfallen der Schnittkurve stattfinden kann, entnehmen wir unmittelbar auch dem in § 299 erstangeführten Satze.

Hier sei ganz allgemein die Bedingung festgestellt, unter welcher die Schnittkurve zweier Flächen zweiten Grades in zwei Kurven zweiten Grades zerfällt.

Diese Bedingung besteht, wie leicht einzusehen, darin, dass sich die beiden Flächen F_2 und F'_2 in zwei verschiedenen Punkten a und b berühren, dass sie also in a resp. b gemeinschaftliche Tangentialebenen T_a resp. T_b besitzen.

Denken wir uns zu diesem Zwecke irgend zwei Punkte c und d, welche den beiden Flächen F_2 und F'_2 gleichzeitig angehören mit der Geraden ab jedoch nicht in einer und derselben Ebene liegen, bestimmt.

Legt man durch a, b und c eine Ebene E, welche die beiden Tangentialebenen T_a und T_b beziehungsweise in den Geraden t_a und t_b schneidet, so findet man, dass die letzteren (§ 263) die beiden Kurven, in welchen F_2 und F'_2 von E geschnitten werden, in a beziehungsweise b berühren müssen. Nachdem aber die bezeichneten Kurven auch den Punkt c gemein haben, so folgt (Satz in § 127, alinea c), dass sie insbesondere zusammenfallen müssen, oder mit anderen Worten, dass die beiden Flächen F_2 und F'_2 eine durch a, b, c gehende Kurve zweiten Grades gemein haben. In gleicher Weise findet man bei Benützung des zweiten gemeinschaftlichen Punktes d, dass die beiden Flächen F_2 und F'_2 noch eine zweite, durch die Punkte a, b und d gehende Kurve zweiten Grades gemein haben.

Nachdem diese beiden gemeinschaftlichen Kurven beider Flächen zusammengenommen bereits einen Ort vierter Ordnung vorstellen, so ist einleuchtend, dass sie gleichzeitig auch den Gesamtschnitt dieser Flächen repräsentieren, und man hat mithin den Satz:

„Berühren sich zwei Flächen zweiten Grades in zwei Punkten, so zerfällt die Schnittkurve dieser Flächen in zwei durch die beiden genannten Punkte gehenden Kurven zweiten Grades.“

XV. Kapitel.

Darstellung der Kegel und Cylinder zweiten Grades, ihrer ebenen Schnitte, Tangentialebenen u. s. w. in centraler Projektion.

§ 309.

99. Aufgabe: **Es ist ein Kegel zweiten Grades darzustellen, dessen Leitkurve in einer gegen die Bildebene geneigten Ebene durch zwei konjugierte Durchmesser ihres Bildes, und dessen Scheitel auf einem Träger gegeben ist; ferner sollen die Schnittpunkte des Kegels mit einer gegebenen Geraden konstruiert werden.**

Die Ebene der Leitkurve **K** sei $L_v L_b$ [Fig. 221, Taf. XV]. Das Bild **K** der besagten Kurve ist eine Kurve zweiten Grades, von welcher die beiden konjugierten Durchmesser **ab** und **cd** gegeben sind. Mittels der letzteren ist bekanntlich die Kurve selbst leicht zu verzeichnen. Ferner ist der Kegelscheitel durch seine Centralprojektion **S** auf dem Träger $\delta\varphi$ gegeben.

Jede Gerade, welche **S** mit einem Punkte der Kurve **K** verbindet, ist das Bild einer Kegelerzeugenden. Die äussersten Bilder der letzteren sind die von **S** aus an **K** geführten Tangenten **St** und **St'**, da die Bilder aller anderen Kegelerzeugenden in dem einen der beiden Winkelräume **tSt'** liegen. Die Geraden **St** und **St** repräsentieren mithin, in Verbindung mit dem einen Teile **tct'** der Kurve **K** (ähnlich wie in § 264 bei einer Pyramide), die „Kontur“ des Kegels.

Hierbei ist gleichzeitig einleuchtend, dass die Geraden **St** und **St'** die Bildflächtracen der durch das Projektionscentrum gehenden Tangentialebenen des Kegels darstellen. Denn die besagten Ebenen gehen einerseits durch den Kegelscheitel **S**, und enthalten anderseits jene Tangenten der Leitkurve **K**, deren Centralprojektionen mit den Geraden **St** und **St'** zusammenfallen.

Die Kontur **Stact'S** des Kegels ist die Projektion jener Linienkombination desselben, durch welche der letztere gleichsam in zwei Teile zerlegt wird, wovon der eine dem Projektionscentrum näher als der andere liegt, also für ein im Projektionscentrum gedachtes

Auge sichtbar erscheint. (Siehe § 246.) Im vorliegenden Falle kann man bezüglich der „Sichtbarkeit" und des „Gedecktseins" leicht entscheiden. Der Teil **tdbt'** der Kurve **K** liegt (§§ 10 und 11) weiter hinter der Bildebene als der Teil **tact'**, der Kegelscheitel **S** jedoch vor der Bildebene. Infolgedessen ist offenbar der Teil **Stdbt'S** des Kegels gedeckt.

Um die Schnittpunkte des Kegels mit der gegebenen Geraden **dv** zu finden, legen wir auf Grund der an früherer Stelle (§ 266) aufgestellten Prinzipien durch die genannte Gerade g_d^v und durch den Scheitel **S** des Kegels eine Hilfsebene $H_v H_b$, welche die Ebene $L_v L_b$ der Leitkurve **K** in der Geraden **s** = **d'v'** schneidet. Die besagte Hilfsebene trifft den Kegel in jenen Erzeugenden, welche durch die Schnittpunkte **p** und **q** von **s** und **K** gehen.

Die bezeichneten Schnittpunkte können, wenn **K** nicht selbst gezeichnet vorliegen würde, gefunden werden, indem man **K** in den über **ab** als Durchmesser beschriebenen Kreis K_0 affin verwandelt. Hierbei entspricht dem Durchmesser **cd** der Kurve **K** affin der zu **ab** senkrechte Kreisdurchmesser $c_0 d_0$, so dass man in cc_0 die Richtung der Affinitätsstrahlen erhält. Die Gerade **s** schneidet die Affinitätsachse **ab** in Δ und die Gerade **cd** in **z**. Leitet man aus **z** den affin entsprechenden Punkt z_0 in $c_0 d_0$ mittels zz_0 (parallel zu cc_0) ab, so erhält man die entsprechende Gerade $s_0 = z_0 \Delta$. Die Punkte p_0 und q_0, in welchen s_0 den Kreis K_0 trifft, liefern, mittels der Affinitätsstrahlen zurückprojiziert, die Schnittpunkte **p** und **q** von **K** und **s**. Die in der vorgenannten Hilfsebene $H_v H_b$ liegenden Kegelerzeugenden **Sp** und **Sq** treffen endlich die gegebene Gerade **dv** in den gesuchten Schnittpunkten **P** und **Q**.

§ 310.

100. Aufgabe: **An einen Rotationskegel, dessen Leitkreis in einer Ebene $L_v L_b$ [Fig. 222, Taf. XV] gegeben ist, und dessen Höhe (Entfernung des Kegelscheitels vom Mittelpunkte des Leitkreises) in wahrer Grösse bekannt ist, sollen durch einen gegebenen Punkt p Tangentialebenen gelegt, und deren Berührerzeugenden konstruiert werden.**

Der Leitkreis **K** des Umdrehungskegels sei, um die Bildflächtrace L_b seiner Ebene $L_b L_v$ [Fig. 222, Taf. XV] umgelegt, in K_0

dargestellt. Bestimmt man auf bereits bekannte Weise die Centralprojektion o des Mittelpunktes o_0 von K_0, und konstruiert die durch o gehende Normale ov_s zur Ebene $L_v L_b$, so repräsentiert dieselbe die Achse des Kegels. Auf der letzteren ist nun der Kegelscheitel S so zu bestimmen, dass die wahre Grösse von So der gegebenen Höhe h des Kegels gleich wird. Hierzu kann am einfachsten der Teilpunkt T der Geraden ov_s in der Hilfsebene $h_v h_b$ (wobei die Strecke $o_1 s_1$ der gegebenen Höhe h gleich ist) benützt werden.

Die durch den Punkt p an die Kegelfläche zu führenden Tangentialebenen gehen selbstverständlich auch durch den Kegelscheitel S, enthalten mithin die Gerade Sp. Bestimmt man (mit Hilfe einer durch Sv_s und Sp gelegten Hilfsebene $H_v H_b$) den Schnittpunkt π von Sp mit der Ebene $L_v L_b$, so ergeben sich (wie aus § 268 bekannt) sofort die Schnittgeraden der Ebene $L_v L_b$ mit den zu bestimmenden Tangentialebenen als die durch π gehenden T a n g e n t e n d e s L e i t k r e i s e s. Wird demnach π um L_b nach π_0 umgelegt, von π_0 an K_0 eine Tangente t_0^1 gezogen, und diese Tangente, sowohl als auch ihr Berührungspunkt a_0 beziehungsweise nach $t_1 = d_1 v_1$ und a zurückgeführt, so wird die durch t_1 und S gelegte Ebene $B_v^1 B_b^1$ die e i n e der beiden gesuchten T a n g e n t i a l e b e n e n und Sa ihre B e r ü h r e r z e u g e n d e vorstellen. Die zweite Tangentialebene wird erhalten, indem man von der zweiten durch π_0 gehenden Tangente des Kreises K_0 Gebrauch macht.

§ 311.

101. Aufgabe: **An einen Rotationscylinder sind parallel zu einer gegebenen Geraden die möglichen Tangentialebenen zu legen und ihre Berührungserzeugenden zu ermitteln. Ferner sind die Konturerzeugenden des Cylinders auf direktem Wege zu konstruieren.**

Als Leitkurve des Rotationscylinders betrachten wir einen in der Ebene $L_v L_b$ [Fig. 223, Taf. XV] liegenden Kreis K, welcher, um L_b umgelegt, in K_0 dargestellt erscheint. Die Cylindererzeugenden seien zur Ebene $L_v L_b$ senkrecht, ihre Bilder konvergieren daher in dem der Ebene $L_v L_b$ entsprechenden Normalenfluchtpunkte v_s.

Da die zu bestimmenden T a n g e n t i a l e b e n e n z u r G e r a d e n dv p a r a l l e l sein sollen, und nebstbei den unendlich fernen

Scheitel v_s des Cylinders enthalten müssen, so kann ihre Fluchttrace B_v nur die Verbindungsgerade der bezüglichen Fluchtpunkte v und v_s sein.

Die bezeichneten Tangentialebenen werden ferner die Ebene $L_v L_b$ in Geraden schneiden, deren Fluchtpunkt der Schnitt v' der beiden Fluchttracen L_v und B_v ist, und welche (nach § 267) notwendig den Kreis K berühren werden.

In der Umlegung erscheinen diese Schnittgeraden mithin als die zum Fluchtstrahle $C_0 v'$ parallelen Tangenten t_1^0 und t_2^0 des Kreises K_0. Bestimmt man hieraus deren Centralprojektionen $t_1 = v'd_1$ und $t_2 = v'd_2$, sowie die Bilder p_1 und p_2 der Berührungspunkte, so werden die durch t_1 und t_2 parallel zu B_v gelegten Ebenen $B_v B_b^1$ und $B_v B_b^2$ die gesuchten Berührebenen, und die Geraden $v_s p_1 = g_1$ und $v_s p_2 = g_2$ die Bilder ihrer Berührungserzeugenden repräsentieren.

Die Konturerzeugenden des Cylinders sind jene Geraden, welche das Bild K der Leitkurve berühren, also jene Tangenten von K, welche gleichzeitig durch v_s gehen.

Um die besagten Erzeugenden zu konstruieren, haben wir bloss v_s als die Centralprojektion eines der Ebene $L_v L_b$ angehörenden Punktes σ zu betrachten, diesen Punkt um L_b nach σ_0 umzulegen, und von σ_0 aus an K_0 die Tangenten $\tau_1^0 = \sigma_0 \delta_1$ und $\tau_2^0 = \sigma_0 \delta_2$ zu ziehen. Die Centralprojektionen $\tau_1 = \sigma \delta_1$ und $\tau_2 = \sigma \delta_2$ derselben gehen durch σ oder v_s, berühren das Bild K der Leitkurve, repräsentieren mithin die Konturerzeugenden des Cylinders.

In gleicher Weise können auch die Konturerzeugenden eines Kegels gefunden werden. Da nämlich auch in diesem Falle die Konturerzeugenden jene Geraden sind, welche vom Bilde S des Kegelscheitels berührend an das Bild K der Leitkurve geführt werden können (§ 309), so wird man, falls K in der Umlegung als Kreis erscheint, am einfachsten wieder S als das Bild eines in der Ebene des Kreises K liegenden Punktes betrachten und weiter dann so, wie beim Cylinder, verfahren.

§ 312.

102. Aufgabe: **Es ist eine Ebene so zu wählen, dass sie einen Kegel zweiten Grades in einer Ellipse schneidet; zwei konjugierte Durchmesser des Bildes dieser Ellipse sind direkt zu konstruieren.**

Der Kegel sei durch seine Leitkurve **K** in der Ebene $L_v L_b$ [Fig. 224, Taf. XV], (wobei wir allenfalls voraussetzen wollen, dass das Bild dieser Leitkurve durch die Achsen **ab** und **cd** bestimmt sei) und durch das Bild **S** des Scheitels auf dem Träger $\delta\varphi$ gegeben.

Die schneidende Ebene $E_v E_b$ soll, wie gefordert wird, so gewählt werden, dass die Schnittkurve eine Ellipse werde. Die besagte Ebene darf mithin (§ 269) zu keiner Kegelerzeugenden parallel sein, oder was dasselbe bedeutet, eine zur schneidenden Ebene durch den Kegelscheitel parallel gelegte Ebene darf mit dem Kegel keine reellen Erzeugenden, und folglich ihre Schnittgerade mit der Ebene $L_v L_b$ mit der Leitkurve **K** keine reellen Punkte gemein haben.

Wenn wir daher durch eine Gerade **d'v** der Ebene $L_v L_b$, welche die Leitkurve **K** nicht reell schneidet, und durch den Kegelscheitel **S** eine Ebene $E_v E'_b$ legen, und hierauf zu dieser eine beliebige Ebene $E_v E_b$ parallel führen, so wird diese den vorgenannten Bedingungen genügen, also die Kegelfläche thatsächlich in einer Ellipse schneiden.

Das Bild dieser Ellipse und das Bild der Leitkurve werden (Satz 1 in § 266) kollinear sein, wobei das Bild **S** des Scheitels das Kollineationscentrum und das Bild $A = vd$ der Schnittgeraden von $E_v E_b$ und $L_v L_b$ die Kollineationsachse repräsentiert.

Hierauf gestützt, kann man leicht zwei konjugierte Durchmesser des Bildes der Schnitt-Ellipse finden.

Führen wir zunächst an die Kurve **K**, worunter wir das durch die Achsen **ab**, **cd** gegebene Bild der Leitkurve verstehen, zwei zu $A = vd$ parallele Tangenten. Zu diesem Zwecke verwandeln wir **K** durch Affinität in den über **ab** beschriebenen Kreis K_0, wobei gleichzeitig die Gerade **A** in A_0 übergeht. Die zu A_0 parallelen Tangenten t'_0 und t''_0 geben, affin zurücktransformiert, die zu **A** parallelen Tangenten **t'** und **t''** der Kurve **K**; ihre Berüh-

rungspunkte **m** und **n** sind jene, welche den Berührungspunkten m_0 und n_0 von t'_0 und t''_0 mit dem Kreise K_0 affin entsprechen.

Legen wir durch die Kegelerzeugende **Sn** irgend eine Hilfsebene $h_v h_b$, so kann mittels derselben auf bekannte Weise der Schnittpunkt dieser Erzeugenden mit der Ebene $E_v E_b$ gefunden werden. Das Bild **N** dieses Punktes gehört dem gesuchten Bilde der Schnittkurve des Kegels an und repräsentiert jenen Punkt, welcher dem Punkte **n** kollinear entspricht. Auf Grund dieser Vorbereitung können nunmehr durch kollineare Konstruktionen leicht zwei konjugierte Durchmesser des Bildes der Schnittkurve ermittelt werden.

Die Gerade **mn** trifft die Kollineationsachse **A** in dem Punkte α; es ist mithin αN die ihr entsprechende Gerade, auf welcher der Kollineationsstrahl **Sm** den dem Punkte **m** entsprechenden Punkt **M** liefert.

Den zu der Kollineationsachse **A** parallelen Tangenten **t'** und **t''** der Kurve **K** in **m** und **n** entsprechen zwei durch **M** beziehungsweise **N** gehende, gleichfalls zu **A** parallele Geraden (nicht gezeichnet), welche nichts anderes als die bezüglichen Tangenten des Bildes Σ der Schnittkurve in **M** resp. **N** vorstellen.

Hieraus folgt unmittelbar, dass **MN** ein Durchmesser von Σ ist. Halbieren wir nun **MN** in **O** und ziehen wir durch **O** die Gerade **YY** parallel zu $A = vd$, so ergibt sich der mit **MN** konjugierte Durchmesser von Σ.

Dem Punkte **O** entspricht auf **mn** der Punkt **o**, und der Geraden **Y** die durch **o** parallel zu **A** geführte Gerade **y**. Letztere trifft die Kurve **K** in den Punkten **p** und **q** (mittels der bereits früher angewandten affinen Beziehung von **K** und K_0 konstruiert), welchen beziehungsweise die Endpunkte **P** und **Q** des Durchmessers **Y** kollinear entsprechen.

§ 313.

103. Aufgabe: **Ein Kegel zweiten Grades ist durch eine Ebene nach einer Hyperbel zu schneiden, und sind die Asymptoten sowie die reelle Achse der letzteren centralprojektivisch darzustellen.**

Als Leitkurve für den Kegel wählen wir den in der Bildebene liegenden Kreis **K** [Fig. 225, Taf. XV], während der Kegelscheitel **S** auf dem Träger $\delta\varphi$ gegeben sei.

Zunächst legen wir durch den Kegelscheitel **S** eine beliebige Ebene $E_v e_b$ so, dass sie mit dem Kegel zwei reelle Erzeugenden **aS** und **bS** (ihre Bildflächtrace e_b mithin zwei reelle Punkte **a** und **b** mit der Leitkurve **K**) gemein hat.

Irgend eine zu dieser Ebene $E_v e_b$ parallele Ebene $E_v E_b$ wird sodann der gestellten Bedingung genügen, den Kegel (§ 269) also in einer Hyperbel schneiden. Die Asymptoten der letzteren werden zu den Erzeugenden **aS** und **bS** parallel sein und sich als Schnitte der Ebene $E_v E_b$ mit den Tangentialebenen des Kegels längs der Erzeugenden **aS** und **bS** ergeben.

Da die Bildflächtracen dieser Tangentialebenen die Tangenten t_α und t_β der Leitkurve **K** in **a** und **b** sind, so erhält man die Durchstosspunkte δ_α und δ_β der genannten Asymptoten im Schnitte von E_b mit t_α und t_β; nachdem ferner die Fluchtpunkte v_α und v_β der Erzeugenden **aS** und **bS** in E_v bekannt sind, so findet man die Asymptoten der Schnitthyperbel centralprojektivisch in $\sigma_1 = \delta_\alpha v_\alpha$ und $\sigma_2 = \delta_\beta v_\beta$ dargestellt.

Die besagten Asymptoten σ_1 und σ_2 schneiden sich in dem Mittelpunkte **O** der Hyperbel, welcher offenbar gleichzeitig den Schnittpunkt der Ebene $E_v E_b$ mit jenem Kegeldurchmesser repräsentiert, welcher durch den, den Tangenten t_α und t_β gemeinschaftlichen Punkt μ geht.

Ermittelt man (durch Umlegung der Parallelstrahlen der Asymptoten) die eine Winkelhalbierende Ov_x der Asymptoten, so stellt dieselbe die reelle Achse der Hyperbel vor. Die Endpunkte derselben, d. h. die Scheitel der Hyperbel, werden sich als ihre Schnittpunkte mit dem Kegel folgendermassen ergeben. Der Durchstosspunkt Δ der Geraden $v_x O$ liegt in E_b. Die Gerade $H_b = \Delta\mu$ repräsentiert mithin die Bildflächtrace der durch Ov_x und den Kegeldurchmesser $SO\mu$ gehenden Ebene. Da H_b die Leitkurve **K** in A_0 und B_0 trifft, so sind $A_0 S$ und $B_0 S$ die beiden Erzeugenden, in welchen die genannte Hilfsebene **H** den Kegel schneidet, und daher die Schnittpunkte **A** und **B** von Ov_x mit $A_0 S$ und $B_0 S$ die gesuchten Achsenendpunkte.

Die Centralprojektion der Schnitthyperbel wird sich als jene Kurve zweiten Grades ergeben, welche durch **A** und **B** geht, und die beiden Geraden $O\delta_\alpha$ und $O\delta_\beta$ beziehungsweise in v_α und v_β berührt.

§ 314.

104. Aufgabe: **Ein Kegel zweiten Grades ist durch eine Ebene in einer Parabel zu schneiden, und sind der Scheitel, die Achse und die Scheiteltangente der letzteren centralprojektivisch darzustellen.**

Der Einfachheit halber nehmen wir wieder an, dass die Leitkurve in der Bildebene liege, und wählen als solche, um unwesentliche Hilfskonstruktionen zu vermeiden, einen Kreis K [Fig. 226, Taf. XVI]. Der Kegelscheitel S ist auf dem Träger $\delta\varphi$ gegeben.

Wir konstruieren vor allem eine beliebige Tangentialebene $E_v e_b$ des Kegels. Nachdem die unendlich ferne Gerade dieser Ebene den Kegel in dem unendlich fernen Punkte v_x der Berührungserzeugenden S_x tangiert, so wird jede zu dieser Tangentialebene parallele Ebene $E_v E_b$ den Kegel in einer Kurve schneiden, welche von der genannten unendlich fernen Geraden gleichfalls in v_x berührt wird, und demnach eine Parabel sein muss.

Die Achse dieser Parabel wird notwendig zu der Berührerzeugenden S_x parallel sein, ihr Fluchtpunkt wird demnach mit v_x zusammenfallen.

Nachdem ferner die Scheiteltangente der Schnittparabel zur Achse der letzteren senkrecht stehen muss, so wird der Fluchtpunkt v derselben offenbar der Schnittpunkt von E_v mit der dem Punkte v_x entsprechenden Normalenfluchttrace S_v sein müssen. Die Scheiteltangente der Parabel ist aber gleichzeitig eine Tangente des Kegels; dieselbe wird daher in der zu den in v verschwindenden Geraden parallelen Tangentialebene des Kegels liegen.

Zieht man die Gerade Sv, deren Durchstosspunkt d sich in e_b ergibt, und führt man ferner durch d die zweite Tangente t_b an K, so repräsentiert dieselbe die Bildflächtrace der eben genannten Tangentialebene, während der Schnitt $v\Delta = T$ der letzteren mit der Ebene $E_v E_b$ bereits die gesuchte Scheiteltangente der Parabel darstellt.

Da ferner der Tangentialebene $t_b t_v$ die Berührerzeugende S_z entspricht, wird der Schnittpunkt Z der letzteren mit der Scheiteltangente T den Parabelscheitel, und endlich die Gerade Zv_x die Achse der Parabel darstellen.

§ 315.

Die Kegel- und Cylinderflächen zweiten Grades finden auch eine sehr häufige Verwendung bei der konstruktiven Lösung solcher Probleme, welche mit der Einschaltung resp. mit dem Auftragen gegebener Strecken oder gegebener Winkel im Zusammenhange stehen. Um die diesbezüglichen Methoden klar zu legen, mögen an dieser Stelle einige einschlägige Probleme durchgeführt werden.

105. Aufgabe: **Eine Strecke von gegebener Länge ist parallel zu einer Ebene zwischen zwei sich nicht schneidende Geraden einzuschalten, d. h. so zu legen, dass ihre Endpunkte auf diesen Geraden liegen.**

Seien l_1 und l_2 [Fig. 227, Taf. XVI] die beiden gegebenen Geraden, E die gegebene Ebene, und r die Länge der parallel zu E zwischen l_1 und l_2 einzuschaltenden Strecke.

Denken wir uns in der Ebene E einen Kreis K gezeichnet, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt σ von l_1 mit E, und dessen Radius gleich r ist. Den Kreis K betrachten wir als die Leitkurve einer Cylinderfläche, deren Erzeugenden zu der Geraden l_1 parallel sind. Denken wir uns ferner alle zur Ebene E parallelen Strecken von der Länge r, welche sich mit einem ihrer Endpunkte auf die Gerade l_1 stützen, konstruiert, so findet man, dass die zweiten Endpunkte aller dieser Strecken auf der genannten Cylinderfläche liegen.

Ist nämlich beispielsweise $s_1 a_1$ eine solche Strecke r, wobei s_1 auf l_1 liege, so wird dieselbe offenbar zu einem Radius $r = \sigma\alpha_1$ des Kreises K parallel und diesem Radius selbst gleich sein. Infolgedessen ist selbstverständlich auch $\alpha_1 a_1$ parallel zu l_1, also eine Erzeugende des Cylinders; der Punkt a_1 liegt daher notwendig auf dem letzteren.

Bestimmen wir ferner die Schnittpunkte der zweiten gegebenen Geraden l_2 mit dem Cylinder, indem man durch l_2 eine zu l_1 parallele Ebene legt, den Schnitt l' der letzteren mit der Ebene E ermittelt und durch die Punkte α_1 und α_2, in welchen l' den Leitkreis K trifft, die Cylindererzeugenden zieht, so werden diese auf l_2 die gesuchten Schnittpunkte a_1 und a_2 bestimmen, und es ist einleuchtend, dass die besagten Punkte a_1 und a_2 die

zweiten Endpunkte der beiden dem gestellten Probleme entsprechenden Strecken repräsentieren werden.

Zieht man nämlich durch a_1 die Parallele zu $\sigma\alpha_1$, so wird dieselbe die Gerade l_1 in einem Punkte s_1 schneiden müssen, und es folgt aus dem Parallelogramme $\sigma\sigma_1\mathsf{a}_1\alpha_1$, dass $\mathsf{s}_1\mathsf{a}_1 = \sigma\mathsf{a}_1 = \mathsf{r}$ ist. Weiter ist $\mathsf{s}_1\mathsf{a}_1$ als parallel zu $\sigma_1\alpha_1$ auch parallel zur Ebene E. Das Gleiche gilt von der durch a_2 parallel zu $\sigma\alpha_2$ gezogenen Strecke $\mathsf{s}_2\mathsf{a}_2$.

Nachdem hiermit die Lösung der gestellten Aufgabe sichergestellt ist, unterliegt die centralprojektivische Durchführung keinerlei Schwierigkeit.

Seien diesbezüglich in gleicher Bedeutung wie eben besprochen, $\mathsf{l}_1 = \mathsf{d}_1\mathsf{v}_1$ zu $\mathsf{l}_2 = \mathsf{d}_2\mathsf{v}_2$ [Fig. 228, Taf. XVI] die beiden gegebenen Geraden, $\mathsf{E}_v\mathsf{E}_b$ die gegebene Ebene.

Vor allem ermitteln wir den Schnittpunkt σ von E mit $\mathsf{l}_1 = \mathsf{d}_1\mathsf{v}_1$ und bestimmen die Schnittgerade $\mathsf{l}' = \varphi\delta_1$ von E mit der durch l_2 parallel zu l_1 gelegten Hilfsebene $\mathsf{h}'_v\mathsf{h}'_b$. Nach entsprechender Umlegung um E_b erhält man σ_0 und l'_0.

Der in der vorhergehenden Betrachtung [Fig. 227, Taf. XVI] mit K bezeichnete Leitkreis des Cylinders stellt sich nach der Umlegung um E_b als der aus dem Mittelpunkte σ_0 mit dem Radius r beschriebene Kreis K_0 dar. Die Schnittpunkte α_1^0 und α_2^0 von l'_0 und K_0 erscheinen, zurückgeführt, beziehungsweise in α_1 und α_2 dargestellt.

Die bezüglichen durch α_1 und α_2 gehenden Cylindererzeugenden $\mathsf{v}_1\alpha_1$ und $\mathsf{v}_1\alpha_2$ bestimmen auf l_2 die Punkte a_1 und a_2, und nachdem der Kreisradius $\sigma\alpha_1$ seinen Fluchtpunkt φ_1 in E_v hat, so ist die eine der beiden der Aufgabe entsprechenden Strecken $\mathsf{s}_1\mathsf{a}_1$ durch die Verbindungsgerade $\mathsf{a}_1\varphi_1$ repräsentiert. In gleicher Weise findet man die Centralprojektion $\mathsf{s}_2\mathsf{a}_2$ der zweiten Strecke, indem man a_2 mit dem Fluchtpunkte φ_2 des Kreisradius $\sigma\alpha_2$ verbindet.

§ 316.

106. Aufgabe: **Zwischen zwei sich nicht schneidenden Geraden ist eine Strecke von gegebener Länge derart einzuschalten, dass dieselbe gegen eine bestimmte Ebene unter einem gegebenen Winkel geneigt ist.**

Setzen wir voraus, l_1 und l_2 [Fig. 229, Taf. XVI] seien (in allgemeiner graphischer Darstellung) die beiden sich kreuzenden

Geraden und E die gegebene Ebene. Die einzuschaltende Strecke heisse λ, und ihr Neigungswinkel gegen die Ebene E sei φ.

Denken wir uns zunächst in der Geraden l_1 einen Punkt s bestimmt, dessen Abstand von der Ebene E gleich $os = \lambda \sin \varphi$ ist, und aus dem Fusspunkte o des von s auf die Ebene E gefällten Perpendikels os in dieser Ebene E einen Kreis K mit dem Radius $\lambda \cos \varphi$ beschrieben.

Betrachtet man s als den Scheitel und K als den Leitkreis eines Rotationskegels, so werden offenbar alle Erzeugenden $s\alpha_1$, $s\alpha_2 \ldots$ des letzteren den Winkel φ mit der Ebene E einschliessen, während die durch den Scheitel s und durch den Kreis K begrenzten Stücke dieser Erzeugenden die Länge λ besitzen werden.

Verschiebt man diesen Kegel in der Richtung der Geraden l_1 parallel zu sich selbst, so dass s die besagte Gerade l_1 durchläuft, so wird hierbei der Kreis K einen Cylinder erzeugen, dessen Erzeugenden zur Geraden l_1 parallel sind.

Es ist einleuchtend, dass jeder Punkt dieser Cylinderfläche den einen Endpunkt einer gegen E unter dem Winkel φ geneigten Strecke λ, deren zweiter Endpunkt auf l_1 liegt, vorstellt. Weiter ist sofort zu entnehmen, inwiefern dieser Cylinder zur Lösung der gestellten Aufgabe dienen könne. Man hat nämlich die Schnittpunkte a_1 und a_2 der Geraden l_2 mit dem besagten Cylinder zu bestimmen. Dieselben ergeben sich, wie bereits bekannt, als die gemeinsamen Punkte der Geraden l_2 und jenen zwei Cylindererzeugenden $a_1\alpha_1$ und $a_2\alpha_2$, welche die durch l_2 parallel zu l_1 gelegte Hilfsebene enthält.

Zieht man die Erzeugende $s\alpha_1$ des Kegels (s, K) und parallel zu derselben durch a_1 die Gerade s_1a_1, so wird die letztere die Gerade l_1 in einem Punkte s_1 treffen, und es folgt aus dem Parallelogramme $s_1a_1\alpha_1s$ unmittelbar, dass $s_1a_1 = s\alpha_1 = \lambda$ ist. Aus der Parallelität von s_1a_1 und $s\alpha_1$ ergibt sich ferner, dass s_1a_1 ebenso wie $s\alpha_1$ mit der Ebene E den Winkel φ einschliesst, und dass mithin s_1a_1 eine Lage der der gestellten Aufgabe entsprechenden Strecke repräsentiert. Eine zweite Lage erhält man in s_2a_2 als die Parallele durch a_2 zur Kegelerzeugenden $s\alpha_2$.

Berücksichtigt man endlich, dass auf der Geraden l_1 noch ein zweiter Punkt s' existiere, dessen Abstand von E ebenfalls gleich $\lambda \sin \varphi$ ist, so wird man offenbar mit Hilfe dieses Punktes wieder zwei der Aufgabe entsprechende Strecken erhalten können.

Behufs centralprojektivischer Durchführung des gestellten Problemes nehmen wir an, es seien d_1v_1 und d_2v_2 [Fig. 230, Taf. XVI] die beiden gegebenen Geraden l_1 und l_2 und E_vE_b die gegebene Ebene, während die zwischen l_1 und l_2 einzuschaltende Strecke λ und ihr Neigungswinkel gegen die Ebene E_vE_b φ heissen möge.

Um in $d_1v_1 = l_1$ den Punkt s zu finden, dessen Abstand von E_vE_b gleich $\lambda \sin\varphi$ ist, führen wir durch d_1v_1 die zu E_vE_b senkrechte Hilfsebene h_vh_b, bestimmen deren Schnitt $g = \varphi'\delta'$ mit E_vE_b, und legen $l_1 = d_1v_1$ und $g = \varphi'\delta'$ um h_b nach l_1^0 resp. g_0 in die Bildebene um.

Schalten wir hierauf, wie vorher besprochen, zwischen g_0 und l_1^0 die Strecke $s'_0\alpha'_0 = \lambda$ unter dem Winkel φ gegen g_0 in der Weise ein, dass $s'_0o'_0$ (senkrecht zu g_0 geführt) gleich $\lambda \sin\varphi$ ist, also s'_0 die Umlegung des vorgenannten Punktes repräsentiert, so ergibt sich aus dieser unmittelbar auf $l_1 = d_1v_1$ die Centralprojektion s.

Führen wir in gleicher Weise o'_0 nach o (in $g = \varphi'\delta'$) zurück, so erhalten wir den Fusspunkt des von s aus auf E_vE_b gefällten Perpendikels, d. i. jenen Punkt, aus welchem, den vorhergehenden Betrachtungen entsprechend, der Kreis K mit dem Radius $\lambda\cos\varphi = s'_0\alpha'_0$ zu beschreiben ist. Führt man ferner durch $l_2 = d_2v_2$ die zu d_1v_1 parallele Hilfsebene H_vH_b, und legt deren Schnitt $l' = v'd'$ mit der Ebene E_vE_b, sowie den Punkt o um E_b nach l'_0 resp. o_0 um, und beschreibt man aus o_0 mit dem Radius $\lambda\cos\varphi = s'_0\alpha'_0$ den Kreis K_0, welcher von l'_0 in α_1^0 und α_2^0 getroffen wird, so werden diese Punkte, beziehungsweise nach α_1 und α_2 [Fig. 230, Taf. XVI] zurückgeführt, dieselbe Bedeutung haben, wie die gleichnamigen Punkte α_1 und α_2 in Fig. 229, Taf. XVI.

Man wird demnach durch α_1 resp. α_2 die Parallelen zu d_1v_1, d. h. die Geraden α_1v_1 und α_2v_2 ziehen, und im Schnitte derselben mit d_2v_2 beziehungsweise die Punkte a_1 und a_2 erhalten, welche bereits die Endpunkte zweier der Aufgabe entsprechenden Strecken repräsentieren.

Um eine dieser Strecken, beispielsweise die durch a_1 gehende darzustellen, wird bloss zu beachten sein, dass dieselbe zu der Geraden $s\alpha_1$ parallel sein müsse, und demnach den nämlichen Fluchtpunkt ψ_1 (der noch zu bestimmen sein wird) wie die letztere besitze. Der Durchstosspunkt d'_1 von α_1v_1 liegt offenbar in H_b. Die Bildflächtrace e'_b der durch d_1v_1 und $v_1d'_1$ gehenden Ebene $e'_ve'_b$

ist daher die Gerade $d_1d'_1$, während die durch v_1 parallel zu e'_b gezogene Gerade die Fluchttrace e'_v darstellt. Im Schnitte von e'_v mit der ebenfalls in der Ebene $e'_ve'_b$ liegenden Geraden $\alpha_1 s$ erhält man den verlangten Fluchtpunkt ψ_1 der letzteren.

Das von d_1v_1 und d_2v_2 begrenzte Stück s_1a_1 von $a_1\psi_1$ repräsentiert sodann die Centralprojektion einer den Bedingungen der Aufgabe genügenden Strecke λ.

§ 317.

107. Aufgabe: **In einer Geraden ist ein Punkt so zu bestimmen, dass dessen Abstände von einer zweiten Geraden und von einer Ebene in einem bestimmten Verhältnisse stehen.**

Die zu suchenden Punkte werden die Schnittpunkte der erstgenannten Geraden mit jener Fläche sein, welche den geometrischen Ort aller Punkte, deren Abstände von der zweiten Geraden und der gegebenen Ebene in dem bestimmten Verhältnisse stehen, repräsentiert; es wird mithin notwendig sein, diesen geometrischen Ort zu untersuchen.

Sei E [Fig. 231, Taf. XVI] die gegebene Ebene, und l eine die Ebene E im Punkte s schneidende Gerade.

Bezeichnet p einen Punkt des zu untersuchenden Ortes, so müssen die Abstände po und pn von E resp. von l in dem konstanten Verhältnisse $\frac{po}{pn} = \varkappa$ stehen. Es unterliegt nun keinerlei Schwierigkeit, eine dem fraglichen Orte angehörende Kurve zu ermitteln.

Wir führen eine beliebige zur Ebene E parallele Ebene e. Der Abstand der beiden Ebenen E und e heisse x_1. Der Strecke x_1 entspricht vermöge des konstanten Verhältnisses $\varkappa$ eine zweite Strecke $x_2 = \varkappa \cdot x_1$. Betrachten wir nun die Gerade l als die Achse eines Rotationscylinders und wählen als senkrechten Schnitt dieses Cylinders einen Kreis (K), dessen Radius der Strecke $x_2 = \varkappa x_1$ gleich sei, so ist einleuchtend, dass jeder Punkt der Oberfläche dieses Cylinders von der Achse l die Entfernung x_2 hat.

Der Cylinder schneidet ferner die Ebene e in einer Ellipse K, deren Achsen ab und cd leicht gefunden werden können. Wir denken uns zu diesem Zwecke durch l eine zur Ebene e senkrechte Hilfsebene h gelegt. Der in dieser Ebene liegende Durchmesser des Kreises (K) sei $\xi = \alpha\beta$, und der zu diesem Durchmesser

senkrechte Kreisdurchmesser, welcher offenbar parallel zur Ebene **e** sein wird, sei $\eta = \gamma\delta$. Den beiden Kreisdurchmessern $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ entsprechen (vermöge der Cylindererzeugenden $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$) die konjugierten Durchmesser **ab** und **cd** der Ellipse **K**.

Nachdem jedoch der eine dieser Durchmesser **cd** mit $\gamma\delta$ parallel ist, und der andere als Schnitt der Ebenen **h** und **e** senkrecht zu **ab** steht, so repräsentieren dieselben insbesondere die Achsen der Ellipse **K**. Was deren Längen betrifft, so findet man:

$$cd = \gamma\delta = 2x_2 = 2\varkappa x_1, \quad \text{und}$$

$$ab = \alpha\beta \frac{1}{\sin\psi} = \frac{2\varkappa x_1}{\sin\psi}.$$

Jeder Punkt **p** der Ellipse **K** hat als ein Punkt der Ebene **e** von der Ebene **E** den Abstand $po = x_1$, und anderseits, als ein Punkt des Cylinders, von der Achse des letzteren den Abstand $pn = x_2 = \varkappa x_1$. Hieraus folgt, dass: $\frac{pn}{po} = \frac{x_2}{x_1} = \varkappa$; die Ellipse **K** ist also ein Bestandteil des in Untersuchung stehenden geometrischen Ortes.

In gleicher Weise würde man in jeder anderen zur Ebene **E** parallelen Ebene eine derartige Ellipse finden. Alle diese Ellipsen gehören aber, wie sehr leicht gezeigt werden kann, einem Kegel an, dessen Scheitel der Schnittpunkt **s** der Ebene **E** und der Geraden **l** ist.

Nachdem eine dem geometrischen Orte angehörige Ellipse **K** bereits ermittelt ist, so wird offenbar der vorgenannte Kegel durch **K** als Leitkurve und **s** als Scheitel vollständig bestimmt sein. Dass derselbe in der That den fraglichen geometrischen Ort repräsentiert, lässt sich folgends einfach darthun.

Ziehen wir eine beliebige Erzeugende **sp** des Kegels, und wählen wir auf dieser irgend einen beliebigen Punkt **p'**. Die orthogonalen Projektionen **o** und **o'** von **p** resp. **p'** auf **E** liegen in der Orthogonalprojektion von **l**, und es wird

$$po : p'o' = ps : p's.$$

Führen wir ferner die zu **l** senkrechten Geraden **pn** und **p'n'**, so folgt aus den ähnlichen Dreiecken **spn** und **sp'n'** weiter

$$pn : p'n' = ps : p's;$$

es ist mithin:

$$\frac{pn}{po} = \frac{p'n'}{p'o'}.$$

Als Punkt der Ellipse K hat aber p die Eigenschaft, dass

$$\frac{\mathsf{pn}}{\mathsf{po}} = \varkappa; \quad \text{es ist daher auch} \quad \frac{\mathsf{p'n'}}{\mathsf{p'o'}} = \varkappa.$$

Auf Grund dieser Betrachtungen kann das gestellte Problem: In einer Geraden DV [Fig. 232, Taf. XVI] einen Punkt so zu bestimmen, dass er von einer Ebene $\mathsf{E_v E_b}$ und von einer Geraden dv Abstände besitzt, die sich wie $\lambda_1 : \lambda_2$ verhalten, folgendermassen centralprojektivisch gelöst werden.

Wir nehmen eine beliebige zu $\mathsf{E_v E_b}$ parallele Ebene $\mathsf{E_v e_b}$ an, bestimmen auf bekannte Weise (Aufgabe 41) den Abstand $\mathsf{rs_1}$ dieser beiden Ebenen und aus diesem letzteren die Strecke rq so, dass $\mathsf{rq} = \mathsf{rs_1} \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

Ferner legen wir durch dv die zu den Ebenen E und e senkrechte Hilfsebene $\mathsf{h_v h_b}$, und bestimmen mittels derselben a) den Schnittpunkt s von dv und $\mathsf{E_v E_b}$; b) den Schnittpunkt m von dv und $\mathsf{e_b E_v}$; c) die (durch m gehende) Orthogonalprojektion von dv auf $\mathsf{E_v e_b}$ als Schnittgerade $\mathsf{v'd''} = \mathsf{x}$ der Ebenen $\mathsf{E_v e_b}$ und $\mathsf{h_v h_b}$, d) durch Umlegung um $\mathsf{h_b}$ den Neigungswinkel ψ der Geraden dv gegen die Ebene $\mathsf{e_b E_v}$, d. i. den von den beiden Geraden dv und $\mathsf{d''v'}$ eingeschlossenen Winkel, und e) leiten aus diesem Winkel ψ und der Strecke $\rho\chi = \mathsf{rq}$ mittels des rechtwinkligen Dreieckes $\mathsf{C'_0}\rho\chi$ die Strecke $\mathsf{C'_0}\rho = \mathsf{rq} \cdot \frac{1}{\sin\psi}$ ab.

Gemäss den früher angestellten Betrachtungen ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstände von dv und $\mathsf{E_v E_b}$ in dem Verhältnisse $\lambda_2 : \lambda_1$ stehen, jene Kegelfläche, welcher der Scheitel s entspricht, und deren Leitkurve eine Ellipse in der Ebene $\mathsf{E_v e_b}$ ist, deren Mittelpunkt durch m, deren eine Achse in der Geraden $\mathsf{x} = \mathsf{v'd''}$ durch die Länge $2\rho\mathsf{C'_0}$ und deren zweite Achse durch die Länge $2\mathsf{rq}$ dargestellt erscheint.

Dieser Kegel wird von der Geraden DV in zwei Punkten getroffen, welche der gestellten Aufgabe entsprechen. Um diese Punkte zu erhalten, legen wir durch s und DV die Hilfsebene $\mathsf{H_v H_b}$, und ermitteln den Schnitt $\mathsf{g} = \varphi\delta$ derselben mit der Ebene $\mathsf{E_v e_b}$. Legen wir ferner m, x und g um $\mathsf{e_b}$ beziehungsweise nach $\mathsf{m_0}$, $\mathsf{x_0}$ und $\mathsf{g_0}$ um, tragen auf $\mathsf{x_0}$ von $\mathsf{m_0}$ aus $\mathsf{m_0}\alpha_0 = \mathsf{m_0}\beta_0 = \rho\mathsf{C'_0}$ und senkrecht zu $\mathsf{x_0}$ die Strecken $\mathsf{m_0}\gamma_0 = \mathsf{m_0}\delta_0 = \mathsf{rq}$ auf, so er-

halten wir in $\alpha_0\beta_0$ und $\gamma_0\delta_0$ die Achsen der umgelegten Leitellipse K_0. Die Schnittpunkte p'_0 und p''_0 derselben mit der Geraden g_0 werden vermittels des über $\alpha_0\beta_0$ beschriebenen Affinkreises (K_0) auf bekannte Weise konstruiert. Führt man p'_0 und p''_0 nach p' und p'' zurück, so werden die Geraden sp' und sp'' die der Hilfsebene $H_v H_b$ angehörenden Kegelerzeugenden, und mithin ihre Schnittpunkte P' und P'' mit DV die gesuchten Punkte darstellen.

§ 318.

108. Aufgabe: **In einer Geraden ist ein Punkt zu bestimmen, der von einem gegebenen Punkte und einer zweiten Geraden gleiche Abstände besitzt.**

Behufs Lösung des vorgegebenen Problems wollen wir so wie in früheren Fällen untersuchen, welches der geometrische Ort aller Punkte ist, die von einem Punkte F und einer Geraden l gleiche Abstände besitzen.

Zunächst ist einleuchtend, dass jene Parabel in der Ebene $(l, F) = e$ [Fig. 233, Taf. XVI], welche den Brennpunkt F und die Direktrix l besitzt, dem gesuchten geometrischen Orte angehört. Wie weiter leicht erkennbar, ist dieser geometrische Ort durch jenen Cylinder dargestellt, welcher die vorgenannte Parabel zur Leitkurve hat und dessen Erzeugenden zur Ebene e senkrecht stehen.

Ist nämlich π ein beliebiger Punkt der genannten Parabel, g die durch ihn gehende Erzeugende des besagten Cylinders und P ein willkürlicher Punkt von g; ist ferner α der Fusspunkt des von π auf l gefällten Perpendikels, so wird auch $P\alpha$ senkrecht zu l stehen. Nachdem aber $\pi F = \pi\alpha$ ist, und aus den beiden bei π rechtwinkligen Dreiecken $P\alpha\pi$ und $PF\pi$ folgt, dass:

$$\sqrt{\overline{P\pi}^2 + \overline{\pi\alpha}^2} = P\alpha \quad \text{und} \quad \sqrt{\overline{P\pi}^2 + \overline{\pi F}^2} = PF,$$

also $P\alpha = PF$ sei, kann die obige Behauptung als erwiesen angesehen werden.

Auf Grund dieser Eigenschaft kann die gestellte Aufgabe dadurch ihrer Lösung zugeführt werden, dass man den Schnitt des vorbezeichneten Cylinders mit der zweiten gegebenen Geraden bestimmt.

Die vorstehenden Probleme dürften genügen, um die Anwendung der Kegel- und Cylinderflächen zweiten Grades für Konstruktionen verschiedener Art zu zeigen, und gewiss wird es keiner Schwierigkeit unterliegen in ähnlichen Fällen stets den richtigen Weg zu finden.

XVI. Kapitel.

Windschiefe Flächen zweiten Grades.

§ 319.

An früherer Stelle (§§ 259 und 260) wurde eine windschiefe Fläche als der Ort einfach unendlich vieler stetig aufeinander folgender Geraden definiert und hierbei vorausgesetzt, dass sich je zwei unmittelbar aufeinander folgende Lagen der beweglichen Geraden nicht schneiden.

Nachdem auf jeder windschiefen Fläche beliebig viele Kurven gezeichnet werden können, und alle diese Kurven von allen geraden Erzeugenden der Fläche geschnitten werden müssen, so ist einleuchtend, dass jede windschiefe Fläche, in allgemeinster Form ausgesprochen, dadurch erzeugt gedacht werden kann, dass man einer ihrer Lage nach veränderlichen Geraden die Bedingung auferlegt, in jeder Lage eine gewisse Anzahl von Kurven (Leitkurven) zu treffen.

Man findet ohne weiteres, dass zu diesem Zwecke notwendig drei solche Leitkurven $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ [Fig. 234, Taf. XVI] gegeben sein müssen, und nicht mehr als drei gegeben sein dürfen.

Nimmt man nämlich auf der einen Kurve, etwa auf $\mathbf{C}_1$, einen beliebigen Punkt $\mathbf{a}_1$ als den Scheitel eines Kegels an und betrachtet die Kurve $\mathbf{C}_2$ als Leitkurve für diesen Kegel, so wird der letztere die dritte Kurve $\mathbf{C}_3$ in einer bestimmten endlichen Anzahl von Punkten schneiden, von welchen allenfalls $\mathbf{a}_3$ einer sein mag. Die Kegelerzeugende $\mathbf{g} = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_3$ muss dann selbstverständlich auch die dem besagten Kegel angehörende Kurve $\mathbf{C}_2$ in einem Punkte $\mathbf{a}_2$ schneiden, wird also eine Gerade repräsentieren, welche die drei Kurven $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ und $\mathbf{C}_3$ in je einem Punkte $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ trifft.

Nachdem in gleicher Weise mit jedem anderen Punkte von $\mathfrak{C}_1$ vorgegangen werden kann, so ist einleuchtend, dass man einfach unendlich viele, stetig aufeinander folgende Geraden erhält, welche die drei Kurven $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$ schneiden, also eine Fläche bilden, welche die bezeichneten Kurven zu Leitkurven hat.

Dass die so erzeugte Fläche in der That „windschief" sei, d. h. dass irgend zwei unmittelbar aufeinander folgende Erzeugenden, wie beispielsweise $\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3}$ und $\mathfrak{g}' = \overline{\mathfrak{a}'_1\mathfrak{a}'_2\mathfrak{a}'_3}$, sich nicht schneiden, also nicht in einer Ebene liegen, geht schon aus der allgemeinen gegenseitigen Lage der drei Leitkurven $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ und $\mathfrak{C}_3$ hervor. Denn die drei Geraden $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}'_1$, $\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}'_2$, $\mathfrak{t}_3 = \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}'_3$, welche offenbar Tangenten der Leitkurven sind, müssten in dem Falle, als die Erzeugenden $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ einen Punkt gemein hätten, notwendig in einer und derselben Ebene $(\mathfrak{g}\mathfrak{g}')$ liegen, was im allgemeinen nicht der Fall sein wird.

Durch entsprechende Wahl der Leitkurven und ihrer gegenseitigen Lage können alle möglicherweise denkbaren windschiefen Flächen erzeugt werden; die einfachste windschiefe Fläche wird man erhalten, wenn man als Leitlinien drei sich kreuzende Geraden voraussetzt.

Mit dieser Fläche, welche das *„windschiefe"* oder *„einmantelige Hyperboloid"* genannt wird, wollen wir uns zunächst befassen und deren Eigenschaften untersuchen.

§ 320.

Die dem Hyperboloide eigentümlichen Eigenschaften entspringen grossenteils dem Erzeugungsgesetze dieser Fläche. Da der Erzeugung derselben gerade Linien zu Grunde liegen, wollen wir uns zunächst der Konstruktion einzelner Erzeugenden zuwenden.

Seien $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{d}_1\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{l}_2 = \mathfrak{d}_2\mathfrak{v}_2$ und $\mathfrak{l}_3 = \mathfrak{d}_3\mathfrak{v}_3$ [Fig. 235, Taf. XVII] die drei Leitgeraden des Hyperboloides. Nachdem diese drei Leitgeraden von allen Erzeugenden geschnitten werden müssen, so ist einleuchtend, dass durch jeden einzelnen Punkt jeder dieser Leitgeraden eine Erzeugende gehen muss.

Um beispielsweise die Erzeugende zu finden, welche durch den willkürlich auf $\mathfrak{l}_3 = \mathfrak{d}_3\mathfrak{v}_3$ gewählten Punkt $\mathfrak{a}_3$ geht, haben wir bloss zu berücksichtigen, dass die zu bestimmende Erzeugende

auch die Leitgerade $l_1 = d_1 v_1$ in irgend einem Punkte a_1 schneiden, sich also in der durch a_3 und l_1 gelegten Hilfsebene $h_v^1 h_b^1$ befinden müsse. Weiter muss die genannte Erzeugende auch die Leitgerade $l_2 = d_2 v_2$ in einem Punkte a_2 treffen, also in der durch a_3 und $l_2 = v_2 d_2$ bestimmten Hilfsebene $h_v^2 h_b^2$ liegen. Die verlangte Erzeugende wird daher notwendig die Schnittgerade DV der beiden Hilfsebenen $h_v^1 h_b^1$ und $h_v^2 h_b^2$ sein.

In gleicher Weise wird man die durch einen beliebigen anderen Punkt a_3' von l_3 gehende Erzeugende als Schnittgerade der beiden Hilfsebenen (l_1, a_3') und (l_2, a_3') erhalten.

Denken wir uns nun, dass der veränderliche Punkt a_3 auf l_3 eine Punktreihe $(a_3 a_3' a_3'' \ldots)$ beschreibe, so wird sich die jeweilig durch den betreffenden Punkt und die Leitgerade l_1 gelegte Hilfsebene h_v^1 um l_1 drehen, oder mit anderen Worten, die besagte Ebene wird ein Ebenenbüschel mit der Achse l_1 erzeugen, welches mit der genannten Reihe perspektivisch ist. Desgleichen wird auch die durch den veränderlichen Punkt a_3 und durch die Leitgerade l_2 gelegte Hilfsebene ein Ebenenbüschel mit der Achse l_2 erzeugen, welches zu der Reihe $(a_3 a_3' a_3'' \ldots)$ gleichfalls perspektivisch sein wird. Man hat daher den Satz:

„Die Erzeugenden eines durch drei Leitgeraden gegebenen Hyperboloides sind die Schnittgeraden entsprechender Ebenen zweier Ebenenbüschel, deren Achsen durch zwei dieser Leitgeraden dargestellt werden, und welche zu der Reihe auf der dritten Leitgeraden (also auch untereinander) perspektivisch sind.“

§ 321.

Ein anderer Weg, die Erzeugenden eines Hyperboloides zu bestimmen, ist auch noch der folgende.

Setzen wir wieder voraus, $l_1 = d_1 v_1$, $l_2 = d_2 v_2$ und $l_3 = d_3 v_3$ [Fig. 236, Taf. XVII] seien die drei Leitgeraden des Hyperboloides.

Da jede Erzeugende der Fläche alle drei Leitgeraden treffen muss, so ist einleuchtend, dass in jeder durch eine der Leitgeraden, etwa durch $l_1 = d_1 v_1$, gelegten Hilfsebene $H_v H_b$ eine derartige Erzeugende liegen wird; dieselbe wird offenbar die Verbindungsgerade DV jener beiden Punkte a_2 und a_3 sein, in welchen die beiden anderen Leitgeraden $l_2 = d_2 v_2$ und $l_3 = d_3 v_3$ von der beliebig gewählten Hilfsebene $H_v H_b$ geschnitten werden.

Lässt man nun die Hilfsebene $H_v H_h$ um l_1 derart rotieren, dass sie ein Ebenenbüschel mit der Achse l_1 beschreibt, so werden hierbei gleichzeitig die beiden Punkte a_2 und a_3 zwei Punktreihen auf den Geraden l_2 und l_3, d. s. die Schnitte dieser Geraden mit dem vorgenannten Ebenenbüschel, erzeugen. Es besteht hiernach der Satz:

„Die Erzeugenden eines durch drei Leitgeraden gegebenen Hyperboloides sind die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte jener beiden Reihen, welche sich als Schnitte irgend zweier der drei Leitgeraden mit dem Ebenenbüschel, dessen Achse die dritte Leitgerade ist, ergeben.“

§ 322.

Die eben angestellten Betrachtungen zeigen, dass das Hyperboloid ein Erzeugnis projektivischer Natur ist. Um diese Thatsache bei Untersuchung der Eigenschaften der bezeichneten Fläche nach Möglichkeit ausnützen zu können, wollen wir das bereits Gesagte noch in gewisser Richtung zu erweitern, beziehungsweise zu verallgemeinern suchen.

Zu diesem Zwecke müssen wir einige Bemerkungen über die Projektivität von Punktreihen auf sich nicht schneidenden Trägern, sowie über jene zweier Ebenenbüschel vorausschicken.

In derselben Weise, wie zwei einstufige projektivische Grundgebilde in derselben Ebene definiert wurden, definieren wir auch zwei einstufige projektivische Gebilde im Raume als zwei Grundgebilde, von welchen das eine aus dem anderen durch eine Reihe von Schnitten und Projektionen abgeleitet werden kann.

Denken wir uns beispielsweise eine Punktreihe $r_1(a_1 b_1 c_1 \ldots)$ von einem beliebigen Centrum C_1 aus auf irgend eine in der Ebene (r_1, C_1) liegende Gerade r_2 nach $r_2(a_2 b_2 c_2 \ldots)$ projiziert, ferner die Reihe $r_2(a_2 b_2 c_2 \ldots)$ von einem zweiten beliebigen Centrum C_2 auf eine in der Ebene (C_2, r_2) liegende Gerade r_3 in die Reihe $r_3(a_3 b_3 c_3 \ldots)$ projiziert, so werden nach der oben aufgestellten Definition die beiden Reihen $r_1(a_1 b_1 c_1 \ldots)$ und $r_3(a_3 b_3 c_3 \ldots)$ bereits projektivisch sein, obwohl sich ihre Achsen r_1 und r_3 im allgemeinen nicht schneiden werden.

Zwei Ebenenbüschel mögen als projektivisch bezeichnet werden, wenn dieselben im Schnitte mit irgend zwei Geraden zwei

projektivische Reihen liefern, oder mit anderen Worten, wenn sie zu zwei projektivischen Punktreihen „perspektivisch" sind.

Es lässt sich aber leicht beweisen, dass irgend zwei projektivische Punktreihen auf zwei sich nicht schneidenden Trägern auf unendlich viele Arten als Schnitte eines und desselben Ebenenbüschels (oder mit anderen Worten, als perspektivisch zu einem und demselben Ebenenbüschel) dargestellt werden können, und umgekehrt, dass zwei projektivische Ebenenbüschel auf unendlich viele Arten als perspektivisch mit einer und derselben Punktreihe aufgefasst werden dürfen.

Um den zweitangeführten Fall zu beweisen, nehmen wir an, es mögen l_1 und l_2 [Fig. 237, Taf. XVII] die sich nicht schneidenden Achsen zweier projektivischen Ebenenbüschel repräsentieren, während A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2 .... Paare entsprechender Ebenen dieser Büschel vorstellen sollen.

Die beiden entsprechenden Ebenen A_1 und A_2 schneiden sich in einer Geraden g_a, welche offenbar die beiden Achsen l_1 und l_2 in je einem Punkte trifft; desgleichen erhalten wir zwei derartige Geraden g_b und g_c im Schnitte der beiden sich entsprechenden Ebenen B_1 und B_2, beziehungsweise der sich entsprechenden Ebenen C_1 und C_2.

Offenbar wird es unendlich viele Geraden geben, welche gleichzeitig die drei sich kreuzenden Geraden g_a, g_b, g_c in je einem Punkte treffen, und sind dies selbstverständlich die Erzeugenden jenes Hyperboloides, dessen Leitgeraden g_a, g_b, g_c sind.

Eine solche Gerade sei l; die Schnittpunkte derselben mit den drei Geraden g_a, g_b, g_c seien beziehungsweise $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$.

Nachdem die beiden Ebenenbüschel $l_1(A_1 B_1 C_1 \ldots)$ und $l_2(A_2 B_2 C_2 \ldots)$ als projektivisch d. h. als solche vorausgesetzt wurden, deren Schnitte mit zwei ganz beliebigen Geraden projektivische Punktreihen sind, so werden dieselben offenbar auch im Schnitte mit der Geraden l zwei projektivische Reihen $l(a_1 b_1 c_1 \ldots)$ und $l(a_2 b_2 c_2 \ldots)$ liefern. Infolge der besonderen Annahme der Geraden l fallen aber drei Paare entsprechender Punkte dieser beiden Reihen, nämlich a_1 und a_2; b_1 und b_2; c_1 und c_2 zusammen; die genannten Reihen sind mithin (Satz in § 110) identisch.

Hiernach vereinigt jeder weitere Punkt von l zwei entsprechende Punkte d_1 und d_2 in sich; es müssen sich daher auch die durch ihn gehenden Ebenen D_1 und D_2 der beiden Ebenenbüschel l_1 und l_2 entsprechen. Die Schnittgerade g_d dieser beiden Ebenen

wird sodann nicht nur durch den genannten Punkt $d_1 d_2$ gehen, sondern auch die beiden Achsen l_1 und l_2 in je einem Punkte treffen müssen.

Da man statt der Geraden l jede andere Gerade l_1, $l_2 \ldots$, welche g_a, g_b und g_c schneidet, wählen kann, um zu gleichem Resultate zu gelangen, so ist hiermit thatsächlich bewiesen, dass die beiden projektivischen Ebenenbüschel auf unendlich viele Arten als projektivisch zu einer und derselben Punktreihe (auf jeder beliebigen Geraden l) aufgefasst werden können.

Auf Grund dieser Eigenschaft können die an früherer Stelle (Satz in § 230) ausgesprochenen beschränkenden Voraussetzungen fallen gelassen werden.

Sind nämlich l_1 und l_2 die Achsen zweier projektivischen Ebenenbüschel, g_a, g_b, g_c die Schnittgeraden dreier Paare entsprechender Ebenen der letzteren, und wählt man eine beliebige Erzeugende l des durch die drei Leitgeraden g_a, g_b, g_c bestimmten Hyperboloides H_g, so sind die beiden Ebenenbüschel l_1 und l_2, wie soeben nachgewiesen wurde, zu der Punktreihe auf l perspektivisch, und erzeugen mithin (Satz in § 230) jenes Hyperboloid H_l, welches die Leitgeraden l_1, l_2 und l besitzt. Es gilt sonach allgemein der Satz:

„Die Schnittgeraden entsprechender Ebenen irgend zweier projektivischen Ebenenbüschel mit sich kreuzenden Achsen erzeugen stets ein Hyperboloid."

§ 323.

Die vorstehenden Betrachtungen führen noch zu einer weiteren höchst beachtenswerten Eigenschaft eines windschiefen Hyperboloides.

Wir haben das von den beiden projektivischen Ebenenbüscheln l_1 und l_2 erzeugte Hyperboloid mit H_l bezeichnet. Zwei Leitgeraden dieses Hyperboloides sind die Achsen l_1 und l_2 der beiden Ebenenbüschel, während als dritte Leitgerade eine beliebige Erzeugende l eines zweiten Hyperboloides, und zwar jenes Hyperboloides H_g angenommen wurde, dessen drei Leitgeraden irgend drei Erzeugende g_a, g_b, g_c des ersten Hyperboloides H_l sind.

Hieraus folgt unmittelbar, dass jede Erzeugende l des Hyperboloides H_g, da durch jeden ihrer Punkte eine Erzeugende g von H_l geht, auch dem Hyperboloide H_l angehören muss, oder mit

anderen Worten, dass die beiden Hyperboloide H_l und H_g eine und dieselbe Fläche bilden. Man bezeichnet demgemäss die sämtlichen Geraden g . . . als die „Erzeugenden des einen Systems" und die sämtlichen Geraden l . . . als die „Erzeugenden des zweiten Systems" für das in Rede stehende Hyperboloid. Es gilt sonach der Satz:

„Jedes windschiefe Hyperboloid besitzt zwei Systeme von geradlinigen Erzeugenden. Zwei demselben Systeme angehörende Erzeugenden schneiden sich nicht; zwei verschiedenen Systemen angehörende Erzeugenden hingegen haben stets einen Punkt gemein. Irgend drei Erzeugende des einen Systems können stets als Leitgeraden für die Erzeugenden des anderen Systems betrachtet werden."

§ 324.

Seien l_1 und l_2 [Fig. 238, Taf. XVII] irgend zwei sich nicht schneidende Geraden, auf welchen zwei Punktreihen $a_1 b_1 c_1$ . . . und $a_2 b_2 c_2$ . . . nach der eingangs (§ 322) aufgestellten Definition projektivisch aufeinander bezogen sind.

Um zu zeigen, dass diese beiden Reihen (wie in § 322 erwähnt wurde) als Schnitte eines und desselben Ebenenbüschels darstellbar sind, denken wir uns drei Paare entsprechender Punkte, beispielsweise a_1 und a_2; b_1 und b_2; c_1 und c_2 durch drei gerade Linien g_a, g_b und g_c verbunden.

Diese drei Geraden bestimmen als Leitgeraden ein Hyperboloid H_g, von dessen Erzeugenden l, l_1, l_2 . . . wir irgend eine beliebige Erzeugende, allenfalls l, wählen und annehmen wollen, dass dieselbe die drei Leitgeraden g_a, g_b, g_c beziehungsweise in a, b und c treffen möge.

Betrachten wir die Gerade l als gemeinschaftliche Achse zweier Ebenenbüschel $l(A_1 B_1 C_1 \ldots)$ und $l(A_2 B_2 C_2 \ldots)$, von welchen das erste die Punktreihe $(a_1 b_1 c_1 \ldots)$, das zweite dagegen die Punktreihe $(a_2 b_2 c_2 \ldots)$ projiziert. Nachdem diese beiden Punktreihen projektivisch sind, müssen es offenbar auch die beiden Ebenenbüschel $l(A_1 B_1 C_1 \ldots)$ und $l(A_2 B_2 C_2 \ldots)$ sein. Hierbei bemerken wir aber gleichzeitig, dass drei Paare entsprechender Ebenen der genannten zwei Ebenenbüschel zusammenfallen und zwar die beiden durch a_1 resp. a_2 gehenden entsprechenden Ebenen A_1 und A_2 in der Ebene (l, g_a); die beiden entsprechenden Ebenen B_1 und B_2 in der Ebene (l, g_b) und die beiden

korrespondierenden Ebenen $\mathbf{C}_1$ und $\mathbf{C}_2$ in der durch $\mathbf{l}$ und $\mathbf{g}_c$ bestimmten Ebene.

Die beiden koaxialen Ebenenbüschel $\mathbf{l}(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1 \ldots)$ und $\mathbf{l}(\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2 \ldots)$ sind sonach speziell identisch, d. h. die Gerade $\mathbf{l}$ ist in der That die Achse eines Ebenenbüschels, welches im Schnitte mit $\mathbf{l}_1$ und $\mathbf{l}_2$ zu gleicher Zeit die beiden gegebenen projektivischen Punktreihen $\mathbf{l}_1(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1 \ldots)$ und $\mathbf{l}_2(\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\mathbf{c}_2 \ldots)$ liefert.

Nachdem ferner die Verbindungsgeraden $\mathbf{g}_a$, $\mathbf{g}_b$, $\mathbf{g}_c$ entsprechender Punkte dieser Reihen auch die Gerade $\mathbf{l}$ treffen, so folgt weiter, dass sie die Erzeugenden jenes Hyperboloides sind, als dessen Leitgeraden die drei Geraden $\mathbf{l}$, $\mathbf{l}_1$ und $\mathbf{l}_2$ gelten. Hiermit erfährt der in § 321 bewiesene Satz die nachstehende Verallgemeinerung:

„Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier projektivischen Reihen auf zwei sich nicht schneidenden Trägern erzeugen ein windschiefes Hyperboloid.“

§ 325.

Setzen wir voraus, die Geraden $\mathbf{l}$, $\mathbf{l}_1$ und $\mathbf{l}_2$ [Fig. 238, Taf. XVII] seien drei beliebige Erzeugende eines und desselben Systems eines Hyperboloides, und nehmen wir weiter an, dass dieselben von den Erzeugenden $\mathbf{g}_a$, $\mathbf{g}_b$, $\mathbf{g}_c \ldots$ des anderen Systems in den Punktreihen $\mathbf{l}(\mathbf{abc} \ldots)$, $\mathbf{l}_1(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1 \ldots)$ und $\mathbf{l}_2(\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\mathbf{c}_2 \ldots)$ getroffen werden mögen, so lässt sich ohne jedwede Schwierigkeit zeigen, dass irgend zwei dieser Punktreihen, allenfalls die Punktreihen auf $\mathbf{l}_1$ nnd $\mathbf{l}_2$, projektivisch sein müssen.

Wie nämlich in § 321 erläutert wurde, können die Erzeugenden $\mathbf{g}_a$, $\mathbf{g}_b$, $\mathbf{g}_c \ldots$ des Hyperboloides erhalten werden, wenn man die Punktepaare, in welchen beliebig durch $\mathbf{l}$ gelegte Ebenen die Geraden $\mathbf{l}_1$ und $\mathbf{l}_2$ schneiden, verbindet.

Die beiden Punktreihen $(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1 \ldots)$ und $(\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\mathbf{c}_2 \ldots)$, welche die Erzeugenden $\mathbf{g}_a$, $\mathbf{g}_b$, $\mathbf{g}_c$, ... auf $\mathbf{l}_1$ und $\mathbf{l}_2$ bestimmen, sind demnach die Schnitte von $\mathbf{l}_1$ und $\mathbf{l}_2$ mit dem Ebenenbüschel aus der Achse $\mathbf{l}$ und als solche notwendig projektivisch. Da ferner $\mathbf{l}_1$ und $\mathbf{l}_2$ zwei beliebig angenommene Erzeugenden des einen Systems repräsentieren, so gilt das Gleiche von allen Erzeugenden dieses Systems, und man gelangt somit zu dem Satze:

„Die Erzeugenden des einen Systems eines windschiefen Hyperboloides bestimmen auf den Erzeugenden des anderen Systems projektivische Punktreihen.“

Durch eine analoge (duale) Betrachtung findet man ebenso leicht den Satz:

„Die Ebenenbüschel, deren Achsen die Erzeugenden des einen Systems eines Hyperboloides sind, und deren Ebenen durch die Erzeugenden des anderen Systems gehen, sind sämtlich projektivisch."

§ 326.

Nehmen wir wieder an, es seien $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ [Fig. 238, Taf. XVII] drei beliebige einem und demselben Systeme angehörende Erzeugenden eines windschiefen Hyperboloides, und $\mathfrak{l}(\mathbf{abc}\ldots)$, $\mathfrak{l}_1(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1\ldots)$ und $\mathfrak{l}_2(\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\mathbf{c}_2\ldots)$ die Punktreihen, in welchen diese Erzeugenden von den Erzeugenden $\mathfrak{g}_a$, $\mathfrak{g}_b$, $\mathfrak{g}_c$ des anderen Systems der genannten Fläche geschnitten werden.

Die Punktreihen $\mathfrak{l}(\mathbf{abc}\ldots)$ und $\mathfrak{l}_1(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1\ldots)$ sind (Satz 1, § 325) projektivisch.

Betrachten wir ferner die Gerade $\mathfrak{l}$ als Achse eines Ebenenbüschels, dessen Ebenen die Erzeugenden $\mathfrak{g}_a$, $\mathfrak{g}_b$, $\mathfrak{g}_c\ldots$ enthalten, oder was dasselbe ist, als Achse eines Ebenenbüschels, welches mit der Reihe $\mathfrak{l}_1(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1\ldots)$ perspektivisch ist, so wird dasselbe mit der Reihe $\mathfrak{l}(\mathbf{abc}\ldots)$ projektivisch sein.

Die Punktreihe $(\mathbf{abc}\ldots)$, welche die Erzeugenden $\mathfrak{g}_a$, $\mathfrak{g}_b$, $\mathfrak{g}_c\ldots$ auf einer Erzeugenden $\mathfrak{l}$ des anderen Systems bestimmen, ist also stets projektivisch zu dem Ebenenbüschel, dessen Achse $\mathfrak{l}$ ist, und dessen Ebenen durch die Erzeugenden $\mathfrak{g}_a$, $\mathfrak{g}_b$, $\mathfrak{g}_c\ldots$ gehen.

Diese Eigenschaft gewinnt namentlich erst dadurch an Wichtigkeit, wenn man die Bedeutung der Ebenen $(\mathfrak{l}, \mathfrak{g}_a)$, $(\mathfrak{l}, \mathfrak{g}_b)\ldots$ mit Rücksicht auf die ihnen entsprechenden Punkte $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ... in Berücksichtigung zieht.

Durch den Punkt $\mathbf{a}$ gehen zwei Erzeugende $\mathfrak{g}_a$ und $\mathfrak{l}$ verschiedener Systeme des Hyperboloides, d. h. zwei dem Hyperboloide angehörende Geraden.

Nachdem nun (wie in Satz 2, § 262 gezeigt wurde) die Tangentialebene des Hyperboloides im Punkte $\mathbf{a}$ die genannten zwei Geraden $\mathfrak{g}_a$ und $\mathfrak{l}$ enthalten muss, so ist dieselbe eben jene Ebene des Büschels $\mathfrak{l}$, welche dem Punkte $\mathbf{a}$ der Reihe $\mathfrak{l}$ entspricht. Das Gleiche gilt auch vom Punkte $\mathbf{b}$, dessen Tangentialebene durch die Ebene $(\mathfrak{g}_b, \mathfrak{l})$ repräsentiert erscheint, u. s. w., so dass der Satz besteht:

„Die Tangentialebenen eines windschiefen Hyperboloides in allen Punkten einer Erzeugenden bilden ein Ebenenbüschel, welches diese Erzeugende zur Achse hat, und mit der Reihe der Berührungspunkte projektivisch ist.“

§ 327.

Das hyperbolische Paraboloid.

Da das windschiefe Hyperboloid ein Erzeugnis projektivischer Natur ist, so sind die projektivischen Eigenschaften desselben ganz unabhängig von der gegenseitigen Lage jener drei sich kreuzenden Geraden, welche ursprünglich als Leitgeraden für die Erzeugenden der besagten Fläche dienen.

Die bereits festgestellten Eigenschaften der eben genannten Fläche werden daher in ihrer Wesenheit auch dann erhalten bleiben (beziehungsweise nur formelle Änderungen erleiden), sobald eine der drei Leitgeraden als unendlich ferne angenommen wird.

Unter dieser letzteren Voraussetzung erhalten wir ein besonderes windschiefes Hyperboloid, welches als das *„hyperbolische Paraboloid“* bezeichnet wird.

Seien $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{v}_1\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{l}_2 = \mathfrak{v}_2\mathfrak{d}_2$ [Fig. 239, Taf. XVII] die beiden im Endlichen liegenden Leitgeraden eines (windschiefen) hyperbolischen Paraboloides, während die unendlich ferne Leitgerade $\mathfrak{l}_\infty$ als die unendlich ferne Gerade irgend einer Ebene $\mathfrak{R}_v\mathfrak{R}_h$, der sogenannten *„Richtebene“*, dargestellt sei.

Jede Erzeugende des Paraboloides muss die unendlich ferne Leitgerade $\mathfrak{l}_\infty$ schneiden oder mit anderen Worten, zu der Richtebene $\mathfrak{R}_v\mathfrak{R}_h$ parallel sein, mithin stets in einer zur Richtebene parallelen Ebene liegen.

Eine beliebige Erzeugende $\mathfrak{DV}$ der besagten windschiefen Fläche wird daher als die Verbindungsgerade jener beiden Punkte $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ erhalten, in welchen die Leitgeraden $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{v}_1\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{l}_2 = \mathfrak{v}_2\mathfrak{d}_2$ von irgend einer beliebigen zur Richtebene $\mathfrak{R}_v\mathfrak{R}_h$ parallelen Ebene $\mathfrak{R}_v\mathfrak{R}_h^1$ getroffen werden.

Durch Parallelverschiebung der Hilfsebene $\mathfrak{R}_v\mathfrak{R}_h^1$ kann man also nach und nach beliebig viele Erzeugenden des windschiefen Paraboloides konstruieren.

§ 328.

Bezeichnen wir die beiden im Endlichen liegenden Leitgeraden eines hyperbolischen Paraboloides mit $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$, und die unendlich

ferne Leitgerade mit $\mathfrak{l}_\infty$, so wird die Gerade $\mathfrak{g}_\infty$, welche die beiden unendlich fernen Punkte der Leitgeraden $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ verbindet, ihrer ganzen Ausdehnung nach im Unendlichen liegen; dieselbe wird daher notwendig auch die unendlich ferne Leitgerade $\mathfrak{l}_\infty$ in einem Punkte treffen, mithin also gleichfalls eine Erzeugende des Paraboloides repräsentieren.

Nachdem, wie wir bereits wissen, die drei Leitgeraden für die Erzeugenden eines windschiefen Hyperboloides nichts anderes als drei Erzeugende des zweiten Systems der nämlichen Fläche sind, so entnehmen wir der vorstehenden Betrachtung sofort, dass das hyperbolische Paraboloid zwei unendlich ferne Erzeugende besitze, von welchen die eine dem einen Systeme, die andere aber dem zweiten Systeme der Erzeugenden dieser Fläche angehört, so dass der besagten Fläche auch zwei verschiedene Richtebenen — für jedes Erzeugendensystem eine Richtebene, wovon die eine parallel ist zu den Erzeugenden des ersten Systems (Leitgeraden des zweiten Systems), die andere dagegen parallel läuft zu den Erzeugenden des zweiten Systems (Leitgeraden des ersten Systems) — entsprechen. Hiernach gilt der Satz:

„Ein hyperbolisches Paraboloid besitzt in jedem seiner beiden Erzeugendensysteme eine unendlich ferne Gerade. Sämtliche Erzeugenden des einen Systems sind parallel zu einer Richtebene, d. h. parallel zu einer durch die unendlich ferne Erzeugende des anderen Systems gelegten Ebene.“

§ 329.

Sind $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ zwei beliebige, demselben Systeme angehörende Erzeugenden eines hyperbolischen Paraboloides, repräsentieren ferner $\mathfrak{g}_a$, $\mathfrak{g}_b$, $\mathfrak{g}_c \ldots \mathfrak{g}_\infty$ beliebige Erzeugenden des anderen Systems, worunter $\mathfrak{g}_\infty$ die unendlich ferne Erzeugende des letzteren Systems vorstellen soll, so werden diese Erzeugenden (Satz 1, § 325) auf den Geraden $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ zwei projektivische Reihen $(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1 \ldots \mathfrak{u}_1)$ und $(\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{c}_2 \ldots \mathfrak{u}_2)$ bestimmen.

Da aber die beiden sich entsprechenden Punkte $\mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{u}_2$ von $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ der unendlich fernen Geraden $\mathfrak{g}_\infty$ angehören, also die unendlich fernen Punkte von $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ darstellen, so sind (§ 167) die beiden projektivischen Reihen $(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1 \ldots)$ und $(\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{c}_2 \ldots)$ insbesondere *„ähnlich“*, und es tritt daher für das hyperbolische Paraboloid an die Stelle des Satzes 1 in § 325 der folgende besondere Satz:

„Die Erzeugenden des einen Systems eines hyperbolischen Paraboloides bestimmen auf den Erzeugenden des anderen Systems ähnliche Punktreihen.“

§ 330.

Jede Ebene, welche zwei Erzeugenden verschiedener Systeme eines windschiefen Hyperboloides enthält, berührt (nach § 326) das Hyperboloid in jenem Punkte, in welchem sich die besagten zwei Erzeugenden schneiden.

Ist die Fläche speziell ein hyperbolisches Paraboloid, so wird auch die unendlich ferne Ebene, da sie die beiden unendlich fernen Erzeugenden der Fläche enthält, die letztere in dem Schnittpunkte dieser Erzeugenden berühren. Mithin besteht der Satz:

„Jedes hyperbolische Paraboloid repräsentiert ein windschiefes Hyperboloid, welches von der unendlich fernen Ebene berührt wird.“

Zu weiteren Eigenschaften des windschiefen Hyperboloides und des hyperbolischen Paraboloides werden wir noch im Verlaufe der Lösung von nachstehenden Problemen gelangen.

§ 331.

109. Aufgabe: **Es ist eine Gerade zu konstruieren, welche vier sich kreuzende Geraden in je einem Punkte schneidet.**

Seien $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{d}_1\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{l}_2 = \mathfrak{d}_2\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{l}_3 = \mathfrak{d}_3\mathfrak{v}_3$ und $\mathfrak{l} = \mathfrak{d}\mathfrak{v}$ [Fig. 240, Taf. XVII] die vier gegebenen sich kreuzenden Geraden.

Um eine Gerade $\mathfrak{g}$ zu finden, welche diese vier Geraden schneidet, betrachten wir drei der letzteren, beispielsweise $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$ und $\mathfrak{l}_3$, als die Leitgeraden für ein Hyperboloid und bestimmen die Schnittpunkte desselben mit der vierten Geraden $\mathfrak{l}$.

Durch je einen solchen Schnittpunkt geht immer eine Erzeugende des Hyperboloides, d. i. eine Gerade, welche nebst $\mathfrak{l}$ auch die drei Leitgeraden $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$ und $\mathfrak{l}_3$ schneidet, mithin der gestellten Aufgabe genügt.

Die Schnittpunkte des Hyperboloides $(\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3)$ mit der Geraden $\mathfrak{l}$ können auf projektivischem Wege leicht erhalten werden.

Wir denken uns (wie in § 320 näher erläutert wurde) das Hyperboloid durch zwei Ebenenbüschel erzeugt, welche die Leitgeraden $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ zu Achsen haben und die Punktreihe auf der

Leitgeraden l_3 projizieren. Diese Ebenenbüschel bestimmen auf der vierten Geraden l zwei konlokale projektivische Reihen, von welchen drei Paare entsprechender Punkte sofort gefunden werden können.

Legt man nämlich durch l_1 und l_2, und durch den Fluchtpunkt v_3 von l_3 die zwei sich entsprechenden Ebenen $A_v^1 A_b^1$ und $A_v^2 A_b^2$, so liefern dieselben im Schnitte mit l die beiden entsprechenden Punkte a_1 und a_2 der vorgenannten Reihen. Ein zweites Paar entsprechender Punkte b_1 und b_2 der letzteren ergibt sich im Schnitte von l mit den beiden durch den Punkt d_3 von l_3 gelegten Ebenen $B_v^1 B_b^1$ und $B_v^2 B_b^2$ der Büschel l_1 und l_2.

Ein drittes Paar korrespondierender Punkte kann man wie folgt konstruieren. Die durch $d_2 v_2 = l_2$ gelegte centralprojizierende Ebene $(C_v^2 C_b^2)$ trifft die Gerade $d_3 v_3 = l_3$ in einem Punkte c_3 und die Gerade l in einem Punkte c_2. Wird nun durch c_3 und l_1 die Ebene $C_v^1 C_b^1$ gelegt, so schneidet dieselbe die Gerade l in dem dem Punkte c_2 entsprechenden Punkte c_1.

Ermitteln wir weiter mittels eines beliebigen Kreises K (nach § 132) die Doppelelemente x und y der beiden projektivischen Reihen $(a_1 b_1 c_1 \ldots)$ und $(a_2 b_2 c_2 \ldots)$. Letztere Operation kann offenbar an den Centralprojektionen selbst vorgenommen werden, da letztere mit den Reihen im Raume perspektivisch sind.

Der Doppelpunkt x vereinigt in sich zwei entsprechende Punkte der beiden Reihen $(a_1 b_1 c_1 \ldots)$ und $(a_2 b_2 c_2 \ldots)$; es gehen mithin durch denselben zwei einander entsprechende Ebenen der Büschel l_1 und l_2. Der Schnitt der beiden letzteren ist einerseits eine Erzeugende $D_x V_x$ des Hyperboloides, und anderseits eine durch x gehende Gerade, also eine Gerade, welche die vier gegebenen Geraden l, l_1, l_2 und l_3 in je einem Punkte schneidet. Eine zweite Gerade $D_y V_y$, welche die gleiche Eigenschaft besitzt, ergibt sich im Schnitte der beiden durch den zweiten Doppelpunkt y gehenden Ebenen der beiden Büschel l_1 und l_2.

Gleichzeitig entnehmen wir der Eigenschaft, dass die beiden projektivischen Reihen $(a_1 b_1 c_1 \ldots)$ und $(a_2 b_2 c_2 \ldots)$ stets zwei reelle oder imaginäre Doppelpunkte besitzen, oder aber, dass alle Punkte der besagten Reihen Doppelpunkte seien, die Reihen mithin identisch sind (§ 110), dass ein Hyperboloid von einer beliebigen Geraden entweder in zwei (reellen oder imaginären) Punkten geschnitten wird, oder aber, dass diese Ge-

rade der ganzen Ausdehnung nach dem Hyperboloide angehört. Es besteht daher der Satz:

„Das windschiefe Hyperboloid ist eine Fläche zweiten Grades.“

Ein Gleiches gilt selbstverständlich auch von dem hyperbolischen Paraboloide, als einer besonderen Form des Hyperboloides; es werden daher sämtliche in Kap. XIV bewiesenen Sätze unmittelbar auch für diese Flächen ihre Geltung haben.

In den folgenden Problemen werden wir hiervon — in Verbindung mit den speziell für das Hyperboloid bewiesenen projektivischen Sätzen — Gebrauch machen.

§ 332.

110. Aufgabe: **Durch eine Gerade sind an ein windschiefes Hyperboloid Berührebenen zu legen.**

Wir führen diese Aufgabe schon an dieser Stelle aus dem Grunde an, weil dieselbe mit dem eben gelösten Probleme im engsten Zusammenhange steht.

Setzen wir wieder voraus, das Hyperboloid sei durch die drei Leitgeraden l_1, l_2 und l_3 [Fig. 240, Taf. XVII] gegeben; die möglichen Tangentialebenen seien durch die Gerade l zu legen.

Da jede Tangentialebene des Hyperboloides sowohl eine Erzeugende des einen, als auch eine Erzeugende des anderen Systems enthalten muss, so ist einleuchtend, dass eine durch l gelegte Tangentialebene eine Gerade enthalten müsse, welche l, l_1, l_2, l_3 zu gleicher Zeit schneidet.

Die zu suchenden Tangentialebenen sind also notwendig jene Ebenen, welche durch l und durch jede der beiden (in der vorhergehenden Aufgabe bestimmten) Geraden $D_x V_x$ und $D_y V_y$ gehen.

§ 333.

111. Aufgabe: **Es ist die Tangentialebene eines windschiefen Hyperboloides in einem seiner Punkte zu konstruieren.**

Erste Methode. Die drei Leitgeraden für das Hyperboloid seien $l_1 = d_1 v_1$, $l_2 = d_2 v_2$ und $l_3 = d_3 v_3$ [Fig. 241, Taf. XVII]. Um zunächst einen Punkt p auf der Fläche zu bestimmen, ermitteln wir eine Erzeugende g dadurch, dass wir allenfalls durch l_1 eine beliebige Hilfsebene $h_v h_b$ legen, und die Schnittpunkte α_2 und α_3 derselben mit den Geraden l_2 und l_3 durch $\delta\varphi = g$

verbinden. Ein beliebig auf $\mathfrak{g}$ gewählter Punkt $\mathfrak{p}$ gehört dann offenbar der Fläche an.

Die Tangentialebene des Hyperboloides im Punkte $\mathfrak{p}$ wird nun sowohl die Erzeugende $\mathfrak{g}$ des einen Systems, als auch die durch $\mathfrak{p}$ gehende Erzeugende $\mathfrak{l}$ des anderen Systems enthalten müssen; besagte Ebene wird mithin bestimmt sein, sobald ausser $\mathfrak{g}$ noch die Erzeugende $\mathfrak{l}$ bekannt ist.

Zu diesem Zwecke wollen wir nachstehend noch zwei weitere Erzeugenden $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{g}''$ des Hyperboloides konstruieren.

Die beziehungsweise durch $\mathfrak{d}_1\mathfrak{v}_1$ und durch $\mathfrak{d}_3\mathfrak{v}_3$ parallel zu $\mathfrak{d}_2\mathfrak{v}_2$ gelegten Ebenen $\mathfrak{h}_v'\mathfrak{h}_b'$ und $\mathfrak{K}_v\mathfrak{K}_b^3$ schneiden sich in einer zu $\mathfrak{v}_2\mathfrak{d}_2$ parallelen, die beiden gegebenen Leitgeraden $\mathfrak{d}_1\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{d}_3\mathfrak{v}_3$ schneidenden Geraden $\mathfrak{g}' = \mathfrak{v}_2\delta'$, d. i. in einer Erzeugenden des Hyperboloides. In gleicher Weise erhält man eine weitere Erzeugende $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{v}_3\delta''$ im Schnitte der durch $\mathfrak{d}_1\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{d}_2\mathfrak{v}_2$ parallel zu $\mathfrak{d}_3\mathfrak{v}_3$ gelegten Ebenen $\mathfrak{h}_v''\mathfrak{h}_b''$ und $\mathfrak{K}_v\mathfrak{K}_b^2$.

Die durch $\mathfrak{p}$ gehende Erzeugende $\mathfrak{l}$ muss selbstverständlich, als dem Hyperboloide angehörend, die beiden Erzeugenden $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{g}''$ schneiden. Legt man daher durch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{g}' = \mathfrak{v}_2\delta'$ die Hilfsebene $\mathfrak{H}_v\mathfrak{H}_b$ und durch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{v}_3\delta''$ die Hilfsebene $\mathfrak{H}_v'\mathfrak{H}_b'$, so ergibt sich die gesuchte durch $\mathfrak{p}$ führende Erzeugende $\mathfrak{l} = \mathfrak{D}\mathfrak{V}$ im Schnitte dieser Ebenen, und hiermit auch die verlangte Berührührungsebene des Hyperboloides im Punkte $\mathfrak{p}$ als die durch $\mathfrak{g} = \delta\varphi$ und $\mathfrak{l} = \mathfrak{D}\mathfrak{V}$ gelegte Ebene $\mathfrak{B}_v^p\mathfrak{B}_b^p$.

Sollte umgekehrt durch $\mathfrak{g} = \delta\varphi$ [Fig. 241, Taf. XVII] eine beliebige Berührebene $\mathfrak{B}_v^p\mathfrak{B}_b^p$ gelegt werden, und hätte man deren Berührungspunkt $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{g}$ festzustellen, so würde man ebenso wie vorher die beiden Hilfserzeugenden $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{g}''$ ermitteln, sodann diese Erzeugenden mit der gegebenen Ebene $\mathfrak{B}_v^p\mathfrak{B}_b^p$ in den Punkten $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ zum Schnitte bringen und die Verbindungsgerade $\mathfrak{m}\mathfrak{n} = \mathfrak{V}\mathfrak{D}$ der letzteren zeichnen, um sofort die in der Tangentialebene $\mathfrak{B}^p$ liegende zweite Erzeugende $\mathfrak{l}$ zu erhalten. Dort wo diese letztere die gegebene Erzeugende $\mathfrak{g}$ schneidet, ergibt sich der gesuchte Berührungspunkt $\mathfrak{p}$.

§ 334.

Zweite Methode. Seien wieder $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$ und $\mathfrak{l}_3$ [Fig. 242, Taf. XVII] die drei Leitgeraden, $\delta\varphi = \mathfrak{g}$ eine beliebige Erzeugende

des Hyperboloides und $\mathfrak{p}$ ein auf $\mathfrak{g}$ willkürlich gewählter Punkt, dessen Tangentialebene zu bestimmen ist.

Die Erzeugende $\mathfrak{g}$ trifft die drei gegebenen Leitgeraden $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{d}_1\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{l}_2 = \mathfrak{d}_2\mathfrak{v}_2$ und $\mathfrak{l}_3 = \mathfrak{d}_3\mathfrak{v}_3$ beziehungsweise in den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$.

Die Tangentialebenen des Hyperboloides in diesen Punkten sind offenbar die drei Ebenen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ und $\mathfrak{T}_3$, welche die besagten drei Leitgeraden mit der Erzeugenden $\mathfrak{g}$ bestimmen. Die Bildflächtracen dieser drei Berührebenen sind die Geraden $\mathfrak{T}_1 = \delta\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{T}_2 = \delta\mathfrak{d}_2$ und $\mathfrak{T}_3 = \delta\mathfrak{d}_3$.

Bezeichnen wir die zu bestimmende Tangentialebene im Punkte $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{B}^{\mathfrak{p}}$ und ihre Bildflächtrace mit $\mathfrak{B}^{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{b}}$, so wird (nach Satz, § 326) der von den vier Ebenen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{B}^{\mathfrak{p}}$ gebildete Wurf mit dem Punktwurfe $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{p}$ projektivisch sein müssen.

Dies zu Grunde gelegt wird auch der Vierstrahl $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{B}^{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{b}}$, welcher von den Bildflächtracen der vorbezeichneten vier Ebenen gebildet ist, mit $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{p}$ projektivisch sein. Gestützt auf diese Eigenschaft lässt sich $\mathfrak{B}^{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{b}}$ folgendermassen bestimmen.

Wir projizieren zunächst den Punktwurf $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{p}$ von irgend einem Punkte $\mathfrak{f}$ auf eine Gerade $\mathfrak{r}_\alpha$, welche durch den Schnittpunkt α_1 von $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{f}\mathfrak{a}_1$ willkürlich gezogen ist nach $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\pi$, und schneiden die drei Strahlen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ und $\mathfrak{T}_3$ durch eine ebenfalls durch α_1 gehende Gerade $\mathfrak{r}_\beta$ in den Punkten β_1, β_2 und β_3.

Das perspektivische Centrum $\mathfrak{S}$ der beiden Reihen $\alpha\ldots.$ und $\beta\ldots.$ erhält man im Schnitte von $\alpha_2\beta_2$ und $\alpha_3\beta_3$. Der Strahl $\mathfrak{S}\pi$ bestimmt auf $\mathfrak{r}_\beta$ den Punkt ρ, und dieser mit δ verbunden, liefert bereits die gesuchte Bildflächtrace $\mathfrak{B}^{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{b}}$; denn aus der Projektionsreihe $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{p})\ \pi\ (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\pi)\ \pi\ (\beta_1\beta_2\beta_3\rho)\ \pi\ (\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3\mathfrak{B}^{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{b}})$ folgt direkt die Projektivität des ersten und des letzten Wurfes.

Wäre umgekehrt durch $\delta\varphi = \mathfrak{g}$ [Fig. 242, Taf. XVII] eine beliebige Tangentialebene $\mathfrak{B}^{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}^{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{b}}$ zu legen, und sollte deren Berührungspunkt $\mathfrak{p}$ bestimmt werden, so hat man die eben besprochene Konstruktion, jedoch in umgekehrter Ordnung durchzuführen, oder mit anderen Worten, anstatt aus $\mathfrak{p}$ mit Hilfe von $\mathfrak{S}$, π und ρ die Trace $\mathfrak{B}^{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{b}}$ abzuleiten, hat man aus $\mathfrak{B}^{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{b}}$ mit Zuhilfenahme von ρ, $\mathfrak{S}$, π den Punkt $\mathfrak{p}$ zu bestimmen.

§ 335.

112. Aufgabe: **Durch eine Erzeugende eines hyperbolischen Paraboloides wird eine beliebige Tangentialebene gelegt; es soll der Berührungspunkt derselben bestimmt werden.**

Seien $l_1 = d_1 v_1$ und $l_2 = d_2 v_2$ [Fig. 243, Taf. XVII] die beiden Leitgeraden des windschiefen Paraboloides und R_v die Fluchttrace der Richtebene für das Erzeugendensystem g.

Wie bereits (§ 327) gezeigt wurde, erhält man irgend eine Erzeugende g des Paraboloides, wenn parallel zur Richtebene R eine beliebige Ebene $R_v R_b^1$ geführt wird und deren Schnittpunkte a_1 und a_2 mit l_1 und l_2 durch eine Gerade verbunden werden.

Die beliebig durch $g = \delta\varphi$ gelegte Ebene $B_v^p B_b^p$ repräsentiere jene Tangentialebene des Paraboloides, deren Berührungspunkt p gefunden werden soll.

Um somit die gestellte Aufgabe zu lösen, haben wir wieder bloss die zweite (dem Systeme l angehörende) in der Ebene B^p liegende Erzeugende der Fläche zu konstruieren.

Nachdem die Leitgeraden l_1 und l_2 zwei Erzeugenden des zweiten Systems repräsentieren, so ist die Fluchttrace für das Erzeugendensystem l notwendig die Gerade S_v, welche die Fluchtpunkte v_1 und v_2 von l_1 und l_2 verbindet.

Im Schnitte V von S_v und B_v^p erhält man bereits den Fluchtpunkt V der gesuchten, in der Berührebene B^p liegenden Erzeugenden l. Nachdem weiter die letztere alle Erzeugenden des Systems g treffen muss, kann ohne weiteres eine solche Erzeugende g' mit Hilfe der Ebene $R_v R_b^2$ bestimmt, deren Schnittpunkt n mit der Ebene B^p ermittelt und hierdurch $l = Vn$ gefunden werden. Im Schnitte von l und g ergibt sich in p der gesuchte Berührungspunkt.

§ 336.

113. Aufgabe: **Die zu einer gegebenen Ebene parallele Tangentialebene eines hyperbolischen Paraboloides ist zu bestimmen und deren Berührungspunkt zu ermitteln.**

Seien wieder l_1 und l_2 oder $d_1 v_1$ und $d_2 v_2$ [Fig. 244, Taf. XVII] die beiden Leitgeraden und R_v die Fluchttrace der Richtebene für das Erzeugendensystem g.

Die Bedingung, dass die verlangte Berührebene zu einer gegebenen Ebene parallel sein solle, lässt sich centralprojektivisch bekanntlich dadurch ausdrücken, dass man die Fluchttrace B_v^p der Berührebene, als mit der Fluchttrace B_v^p der gegebenen Ebene zusammenfallend, darstellt.

Die zu bestimmende Tangentialebene muss, wie wir wissen, eine Erzeugende des Systems g sowohl, als auch eine Erzeugende des Systems l enthalten.

Nachdem der Fluchtpunkt der ersteren offenbar durch den Schnittpunkt φ der beiden Fluchttracen R_v und B_v^p bestimmt erscheint, so ergibt sich die besagte Erzeugende g als Schnittgerade $\varphi\delta$ der beziehungsweise durch l_1 und l_2 parallel zu φ gelegten Hilfsebenen $h_v^1 h_b^1$ und $h_v^2 h_b^2$, während die Bildflächtrace B_b^p der gesuchten Berührebene sofort als die Parallele durch δ zu B_v^p erhalten wird.

Um den Berührungspunkt p dieser Ebene zu bestimmen, verfahren wir in derselben Weise, wie in der vorhergehenden Aufgabe dargethan wurde, d. h. wir suchen mittels einer zur Richtebene R_v parallelen Ebene $R_v R_b^1$ eine Hilfserzeugende g', ermitteln den Schnittpunkt n derselben mit der Ebene $B_v^p B_b^p$ und verbinden den letzteren mit dem Schnittpunkte φ' von B_v^p und $S_v = v_1 v_2$, wodurch die in $B_v^p B_b^p$ liegende Erzeugende $l = \varphi'\delta'$, und im Schnitte derselben mit g der verlangte Berührungspunkt p erhalten wird.

Bemerkung. Das hyperbolische Paraboloid wird von der unendlich fernen Ebene in jenem Punkte berührt, in welchem sich die unendlich fernen Erzeugenden beider Systeme treffen. Die Centralprojektion des Berührungspunktes der besagten Ebene mit dem Paraboloide wird mithin durch den Schnittpunkt U der Fluchttracen R_v und S_v beider Richtebenen dargestellt.

Aus der Theorie der Flächen zweiten Grades ist (§ 306) bekannt, dass jede durch U gehende Gerade einen Durchmesser des Paraboloides repräsentiert. Eine dieser Geraden ist die Achse des Paraboloides und die Berührebene in dem Endpunkte (Scheitel) dieser Achse steht zu der letzteren senkrecht.

Würde nun B_v^p statt einer beliebig gegebenen Fluchttrace die Normalenfluchttrace des Punktes U darstellen, so würde die soeben durchgeführte Konstruktion in $B_v^p B_b^p$ die Scheiteltangentialebene, in p den Scheitel und in pU die Achse des Paraboloides liefern.

§ 337.

114. Aufgabe: **Es ist eine zu einer gegebenen Ebene parallele Tangentialebene eines windschiefen Hyperboloides zu konstruieren.**

Die drei Leitgeraden für das gegebene Hyperboloid seien $l_1 = d_1 v_1$, $l_2 = d_2 v_2$, $l_3 = d_3 v_3$ [Fig. 245, Taf. XVIII]; B_v stelle die Fluchttrace der zu bestimmenden Berührebene vor.

Da die verlangte Tangentialebene eine Erzeugende des Systems g sowohl, als auch eine Erzeugende des Systems l enthalten muss, so wird unsere Aufgabe offenbar nur darin bestehen, jene Erzeugenden des Hyperboloides zu konstruieren, deren Fluchtpunkte in der gegebenen Fluchttrace B_v liegen.

Zu diesem Zwecke wird zu berücksichtigen sein, dass, da selbstverständlich alle Erzeugenden des Hyperboloides reelle unendlich ferne Punkte besitzen, die Fläche selbst notwendig eine reelle unendlich ferne Kurve besitzen müsse. Besagte Kurve wird, wie jeder andere ebene Schnitt des Hyperboloides, eine Kurve zweiten Grades sein; ihre Centralprojektion K_v wird offenbar durch den geometrischen Ort der Fluchtpunkte aller Erzeugenden dargestellt erscheinen.

Drei Punkte der Kurve K_v sind bereits in den Fluchtpunkten v_1, v_2 und v_3 der drei Leitgeraden gegeben; die Tangenten von K_v in zweien dieser Punkte zu finden, wird nun keinerlei Schwierigkeit bieten.

Denken wir uns nämlich durch die Leitgeraden $v_2 d_2 = l_2$ und $v_3 d_3 = l_3$ [Fig. 245, Taf. XVIII] die Hilfsebenen $H_v^1 H_b^1$ und $H_v^2 H_b^2$ parallel zur Leitgeraden $v_1 d_1 = l_1$ gelegt, so schneiden sich dieselben in der zu l_1 parallelen Erzeugenden $g_1 = v_1 \delta_1$. Die durch l_1 und g_1 gelegte Ebene $A_v^1 A_b^1$ ist sodann eine Tangentialebene des Hyperboloides und der unendlich ferne gemeinschaftliche Punkt der beiden Geraden g_1 und l_1 ihr Berührungspunkt. Nach § 263 ist die unendlich ferne Gerade der Ebene $A_v^1 A_b^1$ gleichzeitig die Tangente der unendlich fernen Kurve des Hyperboloides in dem genannten Punkte; ihre Fluchttrace A_v^1 wird mithin die Tangente der Kurve K_v im Punkte v_1 sein. In gleicher Weise bestimmt die asymptotische Ebene der beiden zu einander parallelen Erzeugenden l_3 und g_3, d. i. die Berührebene $A_v^3 A_b^3$ des Hyperboloides in dem unendlich fernen Punkte dieser Erzeugenden die Tangente A_v^3 von K_v in v_3.

Durch die fünf Elemente v_1, v_2, v_3, A_v^1, A_v^3 ist die Kurve K_v zweiten Grades, welche wir, als Ort der Fluchtpunkte aller Hyperboloiderzeugenden, die *„Fluchtkurve“* des Hyperboloides nennen wollen, vollständig bestimmt, und es können somit anstandslos (§ 205) die Schnittpunkte V_1 und V_2 derselben mit der gegebenen Geraden B_v (vermittels eines kollinearen Kreises K_0) festgestellt werden.

Der Punkt V_1 ist, als Punkt der Fluchtkurve K_v, der Fluchtpunkt einer Erzeugenden, welche sich im Schnitte D_1V_1 der durch V_1 und d_1v_1 und beziehungsweise der durch V_1 und d_2v_2 gelegten Hilfsebenen $e_v^1e_b^1$ und $e_v^2e_b^2$ ergibt.

Führt man weiter durch D_1 die Parallele B_b^1 zu B_v, so repräsentiert $B_vB_b^1$ eine der gestellten Aufgabe entsprechende Berührebene des Hyperboloides, deren Berührungspunkt auf bereits bekannte Weise (Bemerk. zu § 233) ermittelt werden kann. Auch der zweite Punkt V_2 liefert eine der obangeführten Aufgabe genügende Tangentialebene.

§ 338.

115. Aufgabe: **Es ist die Kontur eines durch drei Leitgeraden gegebenen Hyperboloides auf der Bildebene bei centralprojektivischer Darstellung zu bestimmen.**

Die Kontur irgend einer Fläche auf der Bildebene ist durch jene Kurve dargestellt, in welcher der der Fläche aus dem Projektionscentrum umschriebene Kegel die Bildebene schneidet.

Dies zu Grunde gelegt, folgt aus den allgemeinen Eigenschaften der Kegelflächen, dass die Bildflächtrace jeder Tangentialebene des umschriebenen Kegels, d. i. die Bildflächtrace jeder durch das Projektionscentrum gehende Tangentialebene der Fläche selbst, eine Tangente der Konturkurve repräsentiere.

Ist die besagte Fläche ein windschiefes Hyperboloid, so ist, wie wir bereits wissen, jede durch eine Erzeugende (des einen oder des anderen Systems) gelegte Ebene eine Tangentialebene. Es wird mithin die Centralprojektion jeder einzelnen Erzeugenden, da sie die Bildflächtrace der durch diese Erzeugende gehenden centralprojizierenden Ebene darstellt, eine Tangente der Konturkurve repräsentieren, oder mit anderen Worten: die Konturkurve des Hyperboloides ist die Einhüllende der Centralprojektionen aller Erzeugenden der Fläche.

Weiter ist aber die besagte Kontur, da das Hyperboloid und folglich auch der demselben aus dem Projektionscentrum umschriebene Kegel vom zweiten Grade ist, eine Kurve zweiten Grades. Dieselbe wird demgemäss durch fünf Tangenten vollständig bestimmt sein.

Als drei dieser Tangenten können unmittelbar die Centralprojektionen l_1, l_2 und l_3 der drei Leitgeraden d_1v_1, d_2v_2, d_3v_3 [Fig. 246, Taf. XVIII] angesehen werden, während sich zwei weitere Tangenten als die Centralprojektionen g und g' irgend zweier Erzeugenden des Hyperboloides ergeben.

Auf Grund dieser Daten wird es nunmehr auch keine Schwierigkeiten bieten, die Konturkurve K selbst, oder ein Paar konjugierter Durchmesser derselben zu konstruieren.

Zu letzterem Zwecke könnte man allenfalls mittels des Brianchon'schen Satzes (§ 144) die Berührungspunkte zweier der fünf Tangenten, etwa von l_1 und l_2, bestimmen, und hierauf die Konturkurve K kollinear auf einen Kreis beziehen, welcher entweder diesen beiden Tangenten, oder auch einem anderen Tangentenpaare eingeschrieben ist.

§ 339.

116. Aufgabe: **Ein ebener Schnitt eines Hyperboloides ist durch zwei konjugierte Durchmesser darzustellen.**

Nachdem jede Erzeugende eines windschiefen Hyperboloides als gerade Linie einen unendlich fernen Punkt hat, so ist notwendig auch der Schnitt des Hyperboloides mit der unendlich fernen Ebene eine reelle Kurve U_2 zweiten Grades.

Das Hyperboloid besitzt infolgedessen auch einen reellen Asymptotenkegel, welcher bekanntlich seinen Scheitel im Mittelpunkte des Hyperboloides hat.

Da jede Erzeugende des Asymptotenkegels durch einen Punkt der unendlich fernen Kurve U_2 des Hyperboloides geht, so ist dieselbe notwendig mit jenen beiden Erzeugenden der zwei Systeme parallel, welche durch den nämlichen Punkt von U_2 gehen.

Die Centralprojektion der Kurve U_2 ist diejenige Kurve, welche wir an früherer Stelle (§ 337) als die *„Fluchtkurve"* des Hyperboloides bezeichneten.

Jede Ebene schneidet das Hyperboloid in einer Kurve zweiten Grades. Die letztere kann selbstverständlich alle drei Formen

annehmen, kann also eine Ellipse, (speziell ein Kreis), eine Hyperbel oder eine Parabel sein.

Hat die unendlich ferne Gerade der schneidenden Ebene mit der vorgenannten unendlich fernen Kurve U_2, oder, was dasselbe ist, hat die Fluchttrace der schneidenden Ebene mit der Fluchtkurve des Hyperboloides zwei nicht reelle, beziehungsweise zwei relle Punkte gemein, so ist die Schnittkurve eine Ellipse resp. eine Hyperbel.

Im letzteren Falle existieren in jedem der beiden Erzeugendensysteme des Hyperboloides zwei zu der schneidenden Ebene parallele Geraden, d. s. jene Erzeugenden, welche durch die vorgenannten zwei unendlich fernen Punkte gehen.

Berührt endlich die Fluchttrace der schneidenden Ebene die Fluchtkurve des Hyperboloides, ist also diese Ebene zu einer asymptotischen Ebene des Hyperboloides (Tangentialebene des Asymptotenkegels) parallel, so ist die Schnittkurve eine Parabel.

Sind nun $d_1 v_1 = l_1$, $d_2 v_2 = l_2$ und $d_3 v_3 = l_3$ [Fig. 247, Taf. XVIII] die drei Leitgeraden für das Hyperboloid und ist $E_v E_b$ die schneidende Ebene, so wird man finden, dass, wenn man sich (wie in § 337 angedeutet) die Fluchtkurve des Hyperboloides bestimmt denkt, dieselbe mit der Trace E_v keine reellen Punkte gemein hat, dass also die diesfallsige Schnittkurve eine Ellipse sein werde.

Um zwei konjugierte Durchmesser dieser Schnittkurve K zu finden, bestimmen wir zunächst die drei der Kurve K angehörenden Schnittpunkte a_1, a_2 und a_3 von l_1, l_2 und l_3 mit der Ebene $E_v E_b$.

Legt man ferner (mit Hilfe der beiden Geraden $\delta\varphi = a_1 a_2$ und $\delta'\varphi' = a_1 a_3$) durch a_1 und $d_2 v_2$ beziehungsweise durch a_1 und $d_3 v_3$ die beiden Hilfsebenen $h_v^2 h_b^2$ und $h_v^3 h_b^3$, so schneiden sich dieselben in der durch a_1 gehenden Hyperboloiderzeugenden $\varphi_1 \delta_1$. Die Tangentialebene $T_v^1 T_b^1$ des Hyperboloides im Punkte a_1 erscheint demnach durch $d_1 v_1$ und $\delta_1 \varphi_1$ bestimmt. Im Schnitte derselben mit der Ebene $E_v E_b$ erhält man somit (§ 263) die Tangente t_1 der Schnittkurve K im Punkte a_1.

Auf gleiche Weise kann auch die Tangente t_2 von K im Punkte a_2 ermittelt werden, so dass nunmehr die Schnittkurve K durch die fünf Elemente a_1, a_2, a_3, t_1 und t_2 vollständig bestimmt ist.

Um nach dieser Vorbereitung zwei konjugierte Durchmesser dieser Kurve zu erhalten, beziehen wir ihre Centralprojektion kollinear auf irgend einen, die Geraden t_1 und t_2 berührenden Kreis K_0.

Bestimmen wir den Halbierungspunkt der Strecke a_1a_2 centralprojektivisch als den mit dem Fluchtpunkte φ von a_1a_2 konjugiert harmonischen Punkt α des Paares a_1, a_2 (§ 160), so wird die Gerade $\Delta\Delta$, welche α mit dem Schnittpunkte C von t_1 und t_2 verbindet, bereits die Centralprojektion eines Durchmessers der Schnittkurve repräsentieren.

Die Endpunkte m und n erhält man auf bekannte Weise durch kollineare Übertragung der Punkte m_0 und n_0, in welchen $\Delta\Delta$ den Kreis K_0 trifft. Der Durchmesser $mn = \Delta$ halbiert die Sehne a_1a_2; der ihm konjugierte Durchmesser Δ' wird daher parallel zu a_1a_2 sein und mithin durch den Fluchtpunkt φ gehen.

Um das Bild dieses Durchmessers zu erhalten, denken wir uns die beiden parallelen Tangenten φm und φn der Schnittkurve gezogen, und die Strecke $\mu\nu$ ihrer Durchstosspunkte μ und ν in ω halbiert. Hiernach repräsentiert $\varphi\omega = \Delta'$ die Centralprojektion des verlangten Durchmessers d. i. jener Geraden, welche durch den Halbierungspunkt des Abstandes der genannten zwei Tangenten geht.

Um endlich die Endpunkte des Durchmessers Δ' zu erhalten, suchen wir die ihm kollinear entsprechende Gerade Δ'_0 und führen deren Schnittpunkte p_0 und q_0 mit dem Kreise K_0 (vermittels der entsprechenden Kollineationsstrahlen) nach p resp. q zurück. Es erscheinen hiermit in mn und pq die Centralprojektionen zweier konjugierter Durchmesser der Schnittkurve K dargestellt.

§ 340.

117. Aufgabe: **Durch direkte Konstruktion sind die Asymptoten eines hyperbolischen ebenen Schnittes eines windschiefen Hyperboloides zu bestimmen.**

Zu diesem Zwecke denken wir uns (wie in § 337, Aufgabe 114) die zur schneidenden Ebene E_vE_b parallelen Erzeugenden g_1 und g_2 bestimmt.

Die Fluchtpunkte φ_1 und φ_2 dieser Erzeugenden stellen gleichzeitig die Bilder der unendlich fernen Punkte der Schnitt-

hyperbel vor, sind daher die gemeinschaftlichen Punkte der Fluchttrace E_v und der Fluchtkurve des Hyperboloides.

Die Tangenten A_v^1 und A_v^2 dieser Fluchtkurve in φ_1 und φ_2 repräsentieren die Fluchttracen der asymptotischen Ebenen $A_v^1 A_b^1$ und $A_v^2 A_b^2$ der Erzeugenden g_1 und g_2.

Die gesuchten Asymptoten werden mithin (§ 263) durch die Schnittgeraden der Ebene $E_v E_b$ mit den beiden Ebenen $A_v^1 A_b^1$ und $A_v^2 A_b^2$ dargestellt erscheinen.

Die Centralprojektion der Schnitthyperbel wird eine Kurve zweiten Grades sein, welche von den beiden genannten Schnittgeraden beziehungsweise in φ_1 und φ_2 berührt wird.

§ 341.

118. Aufgabe: **Die Asymptoten eines beliebigen ebenen Schnittes eines hyperbolischen Paraboloides sind durch direkte Konstruktion zu bestimmen.**

Das hyperbolische Paraboloid sei durch zwei Erzeugenden $l_1 = d_1 v_1$ und $l_2 = d_2 v_2$ [Fig. 248, Taf. XVIII] des Systemes l und durch die Fluchttrace R_v der Richtebene R für das Erzeugendensystem g gegeben. Die Fluchttrace S_v der Richtebene für das Erzeugendensystem l ergibt sich hierbei als die Verbindungsgerade der beiden Fluchtpunkte v_1 und v_2. Die Tracen der schneidenden Ebene seien E_v und E_b.

Welche Lage nun auch die Ebene $E_v E_b$ im allgemeinen haben mag, ihre Fluchttrace E_v wird die Fluchttracen R_v und S_v stets in zwei reellen Punkten φ und v schneiden; die Schnittkurve des hyperbolischen Paraboloides mit der Ebene $E_v E_b$ wird also eine Hyperbel sein, deren unendlich ferne Punkte centralprojektivisch in den Fluchtpunkten φ und v dargestellt sind.

Geht jedoch die Fluchttrace E_v speziell durch den Schnittpunkt U von R_v und S_v, d. h. ist die Ebene $E_v E_b$ parallel zur Schnittgeraden beider Richtebenen, so fallen die beiden Punkte φ und v mit U zusammen; es wird demnach die Schnittkurve eine Parabel sein, deren unendlich ferner Punkt centralprojektivisch durch U dargestellt ist.

Um im allgemeinen die Asymptoten der Schnitthyperbel zu finden, ermitteln wir die dem Fluchtpunkte φ entsprechende, also zur Ebene $E_v E_b$ parallele Erzeugende $\varphi\delta = g$ als Schnittgerade der durch φ und l_1 resp. l_2 gelegten Hilfsebenen $h_v^1 h_b^1$ und

$h_v^2 h_b^2$. Mittels einer beliebigen, zur Richtebene R parallel gelegten Hilfsebene $R_v R_b^1$, ergibt sich auf bereits bekannte Weise eine Erzeugende γ des Systems g.

Denken wir uns weiter durch v und die Erzeugende $g = \delta\varphi$ die Ebene $E_v e_b$ gelegt. Besagte Ebene trifft die Gerade γ in einem Punkte a, welcher offenbar jener Erzeugenden $l = dv$ des Systems l angehört, deren Fluchtpunkt v ist, also zu $E_v E_b$ parallel läuft.

Wenn man berücksichtigt, dass die Fluchttrace R_v die Centralprojektion der unendlich fernen Erzeugenden des Systems l repräsentiert, so ist einleuchtend, dass die durch $g = \delta\varphi$ gelegte Ebene $R_v R_b$ die Tangentialebene des Paraboloides im unendlich fernen Punkte φ (d. h. die der Erzeugenden $g = \delta\varphi$ entsprechende asymptotische Ebene) darstellt.

Die Schnittgerade $\varphi D_1 = \Sigma_1$ der Ebene $R_v R_b$ mit der Ebene $E_v E_b$ muss daher (§ 263) die Tangente der Schnittkurve in φ, d. h. die eine Asymptote der letzteren sein.

In gleicher Weise wird die durch $l = dv$ gelegte asymptotische Ebene $S_v S_b$ von $dv = l$ die Ebene $E_v E_b$ in der zweiten Asymptote $\Sigma_2 = vD_2$ der Hyperbel schneiden. Der gemeinschaftliche Punkt M von Σ_1 und Σ_2 ist das Bild des Mittelpunktes der Schnitthyperbel.

§ 342.

119. Aufgabe: **Es ist der Schnitt der Bildebene mit irgend einem, einem hyperbolischen Paraboloide umschriebenen Cylinder zu konstruieren.**

Das windschiefe Paraboloid sei durch die beiden Leitgeraden $l_1 = d_1 v_1$, $l_2 = d_2 v_2$ [Fig. 249, Taf. XVIII] und die Fluchttrace R_v der Richtebene für das Erzeugendensystem g gegeben. V stelle den gemeinschaftlichen Fluchtpunkt der Erzeugenden des Cylinders vor.

Nachdem jede Ebene, welche durch eine Erzeugende des Paraboloides gelegt wird, das letztere in einem Punkte dieser Erzeugenden berührt, so werden die zu V parallelen Tangentialebenen des Paraboloides und des umschriebenen Cylinders nur jene Ebenen sein, welche durch die Paraboloiderzeugenden parallel zu V geführt werden können. Die Schnittkurve des umschriebenen Cylinders mit der Bildebene wird sodann offenbar die Einhüllende der Bildflächtracen aller dieser Ebenen sein.

Da aber anderseits das hyperbolische Paraboloid, also auch jeder demselben umschiebene Cylinder vom zweiten Grade ist, wird das Gleiche auch von der genannten Schnittkurve gelten, und nachdem weiter jeder dem Paraboloide umschriebene Cylinder ein parabolischer Cylinder ist, wird die besagte Schnittkurve notwendig eine Parabel sein müssen. Letzteres bekanntlich auch deswegen, weil die unendlich ferne Ebene selbst eine Tangentialebene des hyperbolischen Paraboloides vorstellt, und diese gleichzeitig die unendlich fernen Scheitel aller umschriebenen Cylinder enthält.

Legt man daher durch l_1 und l_2 parallel zu V die beiden Ebenen $B_v^1 B_b^1$ und $B_v^2 B_b^2$ [Fig. 249, Taf. XVIII], so werden deren Bildflächtracen $B_b^1 = t_1$ und $B_b^2 = t_2$ zwei Tangenten der vorerwähnten Parabel darstellen. Ermittelt man ferner zwei Erzeugenden g_1 und g_2, so werden auch die Bildflächtracen $B_b^3 = t_3$ und $B_b^4 = t_4$ der durch dieselben parallel zu V gelegten Ebenen B_3 und B_4 zwei Tangenten der Parabel repräsentieren. Die letztere Kurve ist somit durch t_1, t_2, t_3, t_4 vollständig bestimmt, und können mittels ähnlicher Reihen [$t_4(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \ldots)$ und $t_2(\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \ldots)$] beliebig viele (§ 175) weitere Tangenten konstruiert werden.

VIII. Abschnitt.

Windschiefe Flächen höherer Ordnung.

XVII. Kapitel.

Allgemeine Eigenschaften.

§ 343.

An früherer Stelle (§ 319) wurde gezeigt, dass jede wie immer beschaffene windschiefe Fläche durch drei willkürlich auf ihr angenommene Linien, welche als *„Leitkurven“* für die geradlinigen Erzeugenden der besagten Fläche dienen, vollkommen bestimmt sei.

Nehmen wir nun an, diese drei Leitkurven seien $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$ [Fig. 250, Taf. XVIII]; während $\mathbf{g}$ eine beliebige Erzeugende der Fläche d. i. eine Gerade vorstelle, welche jede der drei Leitkurven $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ und $\mathbf{c}_3$ beziehungsweise in je einem Punkte, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ schneidet.

Wählen wir auf $\mathbf{g}$ irgend einen Punkt $\mathbf{a}_x$, so wird die Tangentialebene der windschiefen Fläche in demselben (Satz 2, § 262) durch $\mathbf{g}$ gehen. Um diese Tangentialebene vollkommen zu bestimmen, kann man auf der Fläche irgend eine durch $\mathbf{a}_x$ gehende Kurve, allenfalls einen durch $\mathbf{a}_x$ gehenden ebenen Schnitt $\mathbf{c}_x$, konstruieren.

Die betreffende Tangentialebene im Punkte $\mathbf{a}_x$ der Fläche ist sodann diejenige, welche durch $\mathbf{g}$ und durch die Tangente $\mathbf{t}_x$ der Kurve $\mathbf{c}_x$ im Punkte $\mathbf{a}_x$ geführt werden kann.

Dieser Konstruktion entnehmen wir einige, auf windschiefe Flächen bezughabende wichtige Eigenschaften.

Vor allem wissen wir, dass die Tangente $\mathbf{t}_x$ von $\mathbf{c}_x$ nicht nur durch $\mathbf{a}_x$, sondern auch durch den unmittelbar auf $\mathbf{a}_x$ folgenden Punkt $\mathbf{a}'_x$ der Kurve $\mathbf{c}_x$ geht. Dieser Punkt $\mathbf{a}'_x$ gehört

aber offenbar auch der unmittelbar auf g folgenden Erzeugenden g' der Regelfläche an.

Die Tangentialebene der Fläche in einem anderen Punkte a_y von g wird ebenfalls durch einen unendlich nahe an a_y liegenden Punkt a'_y von g', gleichzeitig aber auch durch g gehen.

Nachdem aber g und g' zwei sich nicht schneidende Geraden sind, so können im allgemeinen die beiden Tangentialebenen in a_x und a_y nicht zusammenfallen; es wird also jedem der unendlich vielen Punkte $a_x \ldots$ auf g eine andere durch g gehende Tangentialebene entsprechen; sowie umgekehrt, jede durch g gelegte Ebene die windschiefe Fläche nur in einem bestimmten Punkte von g berühren wird. Es besteht daher der Satz:

„Jede durch eine Erzeugende einer beliebigen windschiefen Fläche geführte Ebene berührt diese Fläche in einem Punkte der genannten Erzeugenden.“

§ 344.

Seien C_1, C_2, C_3 [Fig. 250, Taf. XVIII] die drei Leitgeraden einer windschiefen Fläche F, g eine Erzeugende der letzteren, und t_1, t_2, t_3 die Tangenten in jenen Punkten a_1, a_2, a_3 in welchen g die Kurven C_1, C_2, C_3 trifft.

Die unmittelbar auf g folgende Erzeugende g' geht durch die unmittelbar auf a_1, a_2 und a_3 folgenden Punkte a'_1, a'_2 und a'_3 der Kurven C_1, C_2 und C_3, muss daher notwendig in denselben Punkten a'_1, a'_2 und a'_3 auch die drei Tangenten t_1, t_2 und t_3 treffen.

Nachdem diese drei Tangenten sich im allgemeinen nicht schneiden, so kann man dieselben auch als die drei Leitgeraden eines windschiefen Hyperboloides H ansehen, dem die Eigentümlichkeit zukommt, dass die beiden Erzeugenden g und g' der windschiefen Fläche F gleichzeitig auch Erzeugenden des Hyperboloides H sind.

Denken wir uns die Tangentialebene T_x des Hyperboloides im Punkte a_x von g gelegt, d. i. jene Ebene bestimmt, welche die Erzeugende g und die durch a_x gehende Erzeugende t_x des anderen Systems (t) enthält.

Die Gerade t_x geht gleichzeitig durch einen unendlich nahe an a_x gelegenen Punkt a'_x von g', repräsentiert daher eine Tangente der windschiefen Fläche F in a_x. Hieraus folgt un-

mittelbar, dass die Ebene T_x auch die windschiefe Fläche F in a_x berührt. Dasselbe wird von der Tangentialebene T_x in jedem anderen Punkte von g gelten, daher die windschiefe Fläche F mit dem Hyperboloide $\mathsf{H} = (\mathsf{t}_1\mathsf{t}_2\mathsf{t}_3)$ längs der Erzeugenden g eine Berührung eingeht.

Wenden wir nun auf dieses Hyperboloid H den in § 326 aufgestellten Satz an, so ergibt sich unmittelbar:

„Die durch eine beliebige Erzeugende einer windschiefen Fläche gehenden Tangentialebenen bilden ein Ebenenbüschel, welches zu der Reihe ihrer Berührungspunkte auf dieser Erzeugenden projektivisch ist."

Aus diesem Satze lässt sich mit Leichtigkeit ein weiterer ableiten.

Haben irgend zwei windschiefe Flächen eine gemeinschaftliche Erzeugende g und berühren sich dieselben in irgend drei Punkten a_1, a_2 und a_3 dieser Erzeugenden, d. h. besitzen die beiden Flächen in diesen Punkten dieselben Tangentialebenen T_1, T_2, T_3 und bestimmt man eine weitere durch g gehende Ebene T_x so, dass die vier Ebenen T_1, T_2, T_3, T_x mit den vier Punkten a_1, a_2, a_3 und a_x auf g projektivisch sind (wobei a_x beliebig angenommen sein mag), so wird, dem vorstehenden Satze entsprechend, die Ebene T_x beide Flächen in a_x berühren. Das Gleiche gilt von jedem anderen Punkte a_x auf g; es besteht sonach der Satz:

„Haben zwei windschiefe Flächen eine Erzeugende gemein, und berühren sich dieselben in drei Punkten dieser Erzeugenden, so berühren sie sich notwendig auch in allen anderen Punkten derselben Erzeugenden."

Nachdem drei sich nicht schneidende Geraden im Raume, welche gegenseitige Lage sie auch sonst haben mögen, immer ein windschiefes Hyperboloid bestimmen, so kann man stets auch durch drei unmittelbar aufeinander folgende Erzeugenden einer beliebigen windschiefen Fläche ein windschiefes Hyperboloid legen.

Denkt man sich sodann diese windschiefe Fläche und das Hyperboloid durch eine beliebige Ebene geschnitten, so erhält man zwei Kurven, welche drei unendlich nahe aneinander liegende Punkte gemein haben, welche sich also „oskulieren".

Nachdem dasselbe von jeder beliebigen schneidenden Ebene gilt, so sagt man, dass die beiden Flächen selbst sich oskulieren, und bezeichnet daher das vorgenannte Hyperboloid als das

„Schmiegungs-" oder *„Oskulationshyperboloid"* der windschiefen Fläche längs einer Erzeugenden, und zwar längs jener Erzeugenden, welche man als die Vereinigung der vorgenannten drei unendlich nahen Erzeugenden auffassen kann.

Die Erzeugenden des Schmiegungshyperboloides haben mit den drei unmittelbar aufeinander folgenden Erzeugenden der windschiefen Fläche drei Punkte gemein, sind mithin Geraden, welche auch mit der Fläche drei unmittelbar aufeinander folgende Punkte gemein haben; sie stellen also *„Inflexionstangenten"* dieser Fläche vor.

Nachdem endlich ein windschiefes Hyperboloid, dessen drei Leitgeraden zu einer und derselben Ebene parallel sind, bekanntlich in ein hyperbolisches Paraboloid übergeht, so ist einleuchtend, dass die *„Oskulationsregelflächen"* einer windschiefen Fläche, welche eine Richtungsebene besitzt, durchgängig *hyperbolische Paraboloide* sein müssen.

XVIII. Kapitel.

Konoide, Cylindroid, Wölbfläche.

§ 345.

Der einfachste Weg, windschiefe Flächen zu unterscheiden oder zu klassifizieren ist der, welcher sich auf die Natur ihrer Leitlinien bezieht.

Hiernach werden als die einfachsten windschiefen Flächen das Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid zu gelten haben, da deren Leitlinien „Geraden" sind.

In die nächste Klasse gehören jene windschiefen Flächen, welche zwei gerade Leitlinien $\mathbf{l}_1$ und $\mathbf{l}_2$ und eine Leitkurve $\mathbf{C}_n$ der $\mathbf{n}$-ten Ordnung besitzen.

Die Ordnung einer solchen Fläche ist durch die Zahl der Erzeugenden ausgedrückt, welche eine beliebige Gerade $\mathbf{h}$ treffen, d. h. also jener Geraden, welche die drei Geraden $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$, $\mathbf{h}$ und die Kurve $\mathbf{C}_n$ schneiden. Diese Zahl ist aber, wie man sofort erkennt, auch die Zahl jener Erzeugenden des Hyperboloides

(l_1, l_2, h), welche die Kurve C_n treffen, also die Zahl der Punkte, welche das genannte Hyperboloid mit C_n gemein hat.

Benützen wir den von Bézout aufgestellten Satz, dass die Anzahl der gemeinschaftlichen Punkte einer Fläche n-ter Ordnung und einer Kurve n'-ter Ordnung gleich nn' sei, so finden wir als Ordnung der windschiefen Fläche (l_1, l_2, C_n) die Zahl $2n$.

Ist die eine Leitgerade einer derartigen windschiefen Fläche unendlich ferne, ist also die eine Leitgerade durch eine „Richtebene", zu welcher die Erzeugenden der Fläche parallel sind, ersetzt, so wird die so hervorgebrachte Fläche ein *„Konoid"* genannt.

Das einfachste Konoid ist jene windschiefe Fläche, deren Erzeugenden zu einer gegebenen Richtebene parallel sind, überdies aber eine Leitgerade und eine Leitkurve zweiten Grades (einen Kegelschnitt) schneiden. Man bezeichnet dieses Konoid als *„Kegelschnittkonoid"*, und insbesondere dann als ein *„gerades"*, wenn die Leitgerade zur Richtebene senkrecht steht.

Die Leitkurve eines Konoides kann auch durch eine Leitfläche, wie beispielsweise im *„Kugelkonoide"* durch eine Kugel ersetzt sein. In diesem Falle sind jene Geraden die Erzeugenden der Fläche, welche zur Richtebene parallel sind, die Leitgerade schneiden und die Kugel (Leitfläche) berühren.

Eine zweite Gattung von windschiefen Flächen ist dadurch charakterisiert, dass sie bloss eine Leitgerade l und zwei Leitkurven C_{n_1} und C_{n_2} von den bezüglichen Ordnungen n_1 und n_2 besitzen.

Die Ordnung dieser Flächen wird wieder durch die Zahl der Erzeugenden bestimmt, welche irgend eine Gerade h treffen, d. i. durch die Zahl jener Geraden dargestellt, welche gleichzeitig l, h, C_{n_1} und C_{n_2} schneiden. Besagte Zahl ist stets gleich der Anzahl der Schnittpunkte der Regelfläche (l, h, C_{n_1}) mit der Kurve C_{n_2}.

Da aber, wie vorher gezeigt wurde, die Ordnung der ersteren gleich $2n_1$ ist, so folgt, dass im vorliegenden Falle (nach dem Bézout'schen Satze) die Ordnung einer derartigen Fläche gleich $2n_1n_2$ sei.

Als besonders bemerkenswerte Flächen dieser Gattung sind die *„Wölbfläche"* und das *„Cylindroid"* zu nennen.

Die erstere der genannten Flächen, d. i. die Wölbfläche, hat zu Leitkurven zwei gleich grosse in parallelen Ebenen liegende Kreise. Die Leitgerade steht zu diesen Ebenen senkrecht und geht durch jenen Punkt, welcher die Verbindungsgerade der Mittelpunkte beider Leitkreise halbiert.

Das Cylindroid kann auf nachstehende Art erzeugt gedacht werden. Man schneidet einen horizontal liegenden Cylinder zweiten Grades durch zwei nicht parallele vertikale Ebenen E_1 und E_2 in den bezüglichen Kurven C_1 und C'_2, und verschiebt eine derselben, etwa die Kurve C'_2 in vertikaler Richtung um irgend eine beliebige Strecke nach C_2. Verbindet man sodann jene Punktepaare von C_1 und C_2, welche vor der Verschiebung den nämlichen Cylindererzeugenden angehörten, geradlinig miteinander, so erhält man die Erzeugenden des Cylindroides.

Wie leicht einzusehen, sind C_1 und C_2 die beiden Leitkurven der Fläche, während die in unendlicher Entfernung liegende Leitgerade durch eine Richtebene ersetzt erscheint, welche parallel zu den Cylindererzeugenden und gleichzeitig parallel zu der Verschiebungsrichtung der Kurve C'_2, also vertikal ist.

Die dritte und allgemeinste Art windschiefer Flächen besitzt keine Leitgerade, sondern drei Leitkurven C_{n_1}, C_{n_2}, C_{n_3}, die wir von den bezüglichen Ordnungen n_1, n_2, n_3 voraussetzen wollen. Durch analoge Schlüsse, wie in den beiden früheren Fällen, findet man, dass die Ordnung einer derartigen Regelfläche gleich $2 n_1 n_2 n_3$ ist.

Die für die drei Typen von Regelflächen gefundenen Ordnungszahlen $2 n_1$, $2 n_1 n_2$, $2 n_1 n_2 n_3$ gelten jedoch nur dann, wenn die Leitkurven keine gemeinschaftlichen Punkte besitzen. Diesfalls sei hier nur bemerkt, dass, wie übrigens selbstverständlich, durch das Vorhandensein solcher Punkte die Ordnungszahl stets erniedrigt wird.

Wie schon mehrmals hervorgehoben wurde, besitzt jede windschiefe Fläche, da den sämtlichen Erzeugenden derselben, als geraden Linien, reelle unendlich ferne Punkte zukommen, einen reellen unendlich fernen Schnitt.

Man kann daher stets auch eine der Leitkurven einer Regelfläche in unendlicher Entfernung voraussetzen. Besagte Leitkurve kann als unendlich ferne Kurve eines als bekannt angenommenen Kegels, des *„Richtungskegels“*, zu dessen Erzeugen-

den jene der Regelfläche parallel sein müssen, gegeben sein, oder, bei centralprojektivischer Darstellung, als die „*Fluchtkurve*" d. h. als Ort der Fluchtpunkte aller Erzeugenden, gegeben vorliegen.

§ 346.

120. Aufgabe: **Ein Kreiskonoid mit einem in der Bildebene liegenden Leitkreise ist gegeben; es sollen einzelne Erzeugenden dieser Fläche konstruiert, und besondere Erzeugenden derselben gefunden werden.**

Sei K [Fig. 251, Taf. XVIII] der in der Bildebene liegende Leitkreis, $l = dv$ die Leitgerade und R_v die Fluchttrace der Richtebene des Konoides.

Um irgend eine Erzeugende der Fläche zu finden, denken wir uns eine beliebige zur Richtebene parallele Ebene $R_v R_b$ angenommen. Diese Ebene (und speziell ihre Bildflächtrace R_b) schneidet den Leitkreis K in zwei Punkten δ_1 und δ_2, während die Leitgerade $l = dv$ von $R_v R_b$ in einem Punkte a getroffen wird. Es sind hiernach sowohl die Gerade $g_1 = \delta_1 a$, als auch die Gerade $g_2 = \delta_2 a$ Erzeugenden des Konoides.

Dieser Konstruktion entnehmen wir gleichzeitig, dass durch jeden Punkt der Leitgeraden l zwei Erzeugende gehen, dass dieselbe daher eine „*Doppelgerade*" des Konoides repräsentiert.

Nehmen wir an Stelle der beliebig gewählten Hilfsebene $R_v R_b$ eine Ebene $R_v R_b^l$ so an, dass deren Bildflächtrace R_b^l den Leitkreis K in einem Punkte Δ_1 berührt. Diese Ebene trifft die Leitgerade l in b; es ist somit $b\Delta_1 = T_1$ wieder eine Erzeugende des Konoides. Letztgenannte Erzeugende $b\Delta_1$ hat überdies einen besonderen Charakter.

Wenn man nämlich die frühere Hilfsebene $R_v R_b$ successive in die Lage $R_v R_b^l$ verschoben denkt, so werden sich hierbei die Punkte δ_1 und δ_2 fortwährend dem Punkte Δ_1, und die beiden Erzeugenden g_1 und g_2 der Erzeugenden T_1 nähern. Hieraus ist ersichtlich, dass in der letzteren eigentlich zwei unendlich nahe, in b sich schneidende Erzeugenden des Konoides vereinigt sind. Infolgedessen hat das Konoid längs T_1 den Charakter eines Kegels, und wird der ganzen Länge $\psi\Delta_1 = T_1$ nach von der Ebene $R_v R_b^l$ berührt.

Eine solche Erzeugende, wie T_1, nennt man eine „*Torsallinie*"

der windschiefen Fläche, während die zugehörige Berührebene $R_v R_b'$ als eine „*Torsalebene*" bezeichnet wird.

Das Kreiskonoid besitzt ferner noch eine zweite Torsallinie, welche durch den Berührungspunkt Δ_2 der zweiten zu R_v' parallelen Kreistangente R_b'' geht.

Denken wir uns die in ganz allgemeiner Lage gewählte Hilfsebene $R_v R_b$ so lange verschoben, bis dieselbe durch den Durchstosspunkt d der Leitgeraden l geht und sonach durch $R_v(R_b)$ dargestellt erscheint. Sind diesfalls d_1 und d_2 die Schnittpunkte von (R_b) mit dem Leitkreise K, so erkennt man ohne weiteres, dass an die Stelle der Erzeugenden g_1 und g_2 die beiden in der Bildflächtrace $(R_b) = G$ vereinigten Erzeugenden dd_1 und dd_2 treten. Die Gerade G ist daher eine „*Doppelerzeugende*" des Konoides.

Die Erzeugenden des besprochenen Konoides können übrigens auch durch eine andere Konstruktionsweise erhalten werden. Indem wir diese hier anschliessen, wollen wir gleichzeitig auch nach weiteren Resultaten suchen.

Legt man nämlich durch die Leitgerade $l = dv$ [Fig. 251, Taf. XVIII] eine beliebige Hilfsebene $e_v e_b$, deren Bildflächtrace e_b den Leitkreis K in den Punkten δ_3 und δ_4 trifft, während sich die Fluchttracen e_v und R_v in φ_3 schneiden, so repräsentieren die Geraden $g_3 = \varphi_3\delta_3$ und $g_4 = \varphi_3\delta_4$ zwei parallele Erzeugenden des Konoides, woraus ersichtlich wird, dass durch jeden Punkt φ_3 . . . der unendlich fernen Leitgeraden zwei Erzeugende des Konoides gehen, dass also die unendlich ferne Leitgerade ebenfalls eine Doppelgerade des Konoides vorstellt.

Wenn man weiter die Hilfsebene $e_v e_b$ um l so lange dreht, bis ihre Bildflächtrace e_b' mit einer Tangente des Leitkreises zusammenfällt, so werden sich hierbei die beiden Punkte δ_3 und δ_4 unaufhörlich dem Berührungspunkte Δ' von e_b' nähern, und werden sich endlich die beiden parallelen Erzeugenden g_3 und g_4 in der Geraden $\Delta'\varphi' = T'$ vereinigen. Diese letztere Gerade T' ist daher auf Grund der früher aufgestellten Definition wieder eine „*Torsallinie*" der Fläche und $e_v' e_b'$ die entsprechende „Torsalebene" derselben. Eine vierte Torsallinie ist endlich jene Erzeugende, welche der zweiten durch d gehenden Tangente des Leitkreises entspricht.

§ 347.

121. Aufgabe: **Parallel zu einer gegebenen Ebene ist an ein Kreiskonoid eine Berührebene zn legen und deren Berührungspunkt zu ermitteln.**

Sei wieder K [Fig. 252, Taf. XIX] der in der Bildebene liegende Leitkreis, $l = dv$ die Leitgerade und R_v die Fluchttrace der Richtebene des Konoides, während E_v die Fluchttrace der zu bestimmenden Tangentialebene darstelle.

Zunächst werden wir eine zur Tangentialebene parallele Erzeugende des Konoides zu bestimmen, d. i. eine der gestellten Bedingung entsprechende Gerade zu suchen haben, deren Fluchtpunkt in E_v liegt. Es ist klar, dass dieser Fluchtpunkt kein anderer als der Schnittpunkt V von E_v und R_v sein könne.

Legt man mithin durch $l = dv$ eine zu V parallele Hilfsebene $e_v e_b$, so wird die Bildflächtrace e_b derselben den Leitkreis K in zwei Punkten D_1 und D_2 treffen, welche mit V verbunden die beiden Geraden $D_1 V = g_1$ und $D_2 V = g_2$ liefern. Letztere repräsentieren zwei Erzeugenden des Konoides, durch deren jede eine der Aufgabe entsprechende Berührebene geht.

Wählen wir beispielsweise die durch g_1 gehende Tangentialebene $E_v E_b$. Um den Berührungspunkt derselben zu finden, stellen wir folgende Betrachtung an.

Zieht man die Tangente l' des Leitkreises K im Punkte D_1, so kann diese und die Gerade $l = dv$ als Leitgeraden eines hyperbolischen Paraboloides angehen, und R_v als die Fluchttrace der einen Richtebene desselben betrachtet werden. Selbstverständlich ist sodann die Erzeugende $g_1 = VD_1$ des Konoides gleichzeitig auch eine Erzeugende dieses Paraboloides.

Die Ebene, welche durch g_1 und l bestimmt ist, berührt sowohl das Konoid, als auch das Paraboloid in dem Schnittpunkte a dieser beiden Geraden. Desgleichen berührt die durch g_1 und l' bestimmte Ebene beide vorgenannte Flächen in dem Punkte D_1. Weiter ist die durch g_1 parallel zu Richtebene R_v gelegte Ebene die gemeinschaftliche Tangentialebene des Konoides und des Paraboloides in dem unendlich fernen Punkte von g_1.

Nach Satz 2, § 344 berühren sich somit die beiden Flächen in allen Punkten der Erzeugenden g_1, und es wird sich daher bloss darum handeln, den Berührungspunkt der Ebene $E_v E_b$

mit dem Paraboloide zu bestimmen. Letzteres kann, wie folgt, geschehen.

Wir bestimmen mittels einer zur Richtebene R_v parallelen Ebene, beispielsweise durch Zuhilfenahme der centralprojizierenden Ebene R_v, eine Erzeugende $\gamma' = \delta'\varphi'$ des Paraboloides. Da die eine Leitgerade — l' — des Paraboloides in der Bildebene liegt, so ist auch die durch den Durchstosspunkt d der Leitgeraden l parallel zu R_v gezogene Gerade γ'' eine — und zwar in der Bildebene liegende — Erzeugende des Paraboloides.

Die Ebene $E_v E_b$ trifft die Erzeugenden γ' und γ'' beziehungsweise in den Punkten n und Δ, welche, miteinander verbunden, bekanntlich die in dieser Berührebene liegende Erzeugende λ des zweiten Systems liefern. Die so erhaltenen Erzeugenden λ und g_1 schneiden sich in dem Punkte P, in welchem $E_v E_b$ das hyperbolische Paraboloid und mithin auch das Konoid berührt.

§ 348.

122. Aufgabe: **Es ist die Schnittkurve eines Kegelschnittskonoides mit einer durch eine Doppelerzeugende gelegten Ebene zu untersuchen.**

Gemäss der in § 345 über die Ordnungszahlen der windschiefen Flächen in gedrängtester Kürze angestellten Betrachtungen ergibt sich, dass ein Kegelschnittskonoid eine Fläche vierter Ordnung ist. Der ebene Schnitt desselben wird daher eine Kurve vierter Ordnung sein. Letztere wird zwei im Endlichen liegende Doppelpunkte (im Schnitte der schneidenden Ebene mit der Leitgeraden und mit der Doppelerzeugenden) und einen unendlich fernen Doppelpunkt [im Schnitte der Ebene mit der unendlich fernen Leit- oder Doppelgeraden (§ 346)] besitzen.

Geht die schneidende Ebene durch eine Erzeugende des Konoides, so ist die letztere selbst ein Bestandteil erster Ordnung der Schnittkurve; die eigentliche Schnittkurve kann demzufolge nur von der dritten Ordnung sein.

Geht endlich die schneidende Ebene insbesondere durch die Doppelerzeugende des Konoides, so ist diese auch als eine dem Gesamtschnitt angehörende Doppelgerade zu betrachten, der übrige eigentliche Schnitt wird demnach nur noch eine Kurve zweiten Grades sein können.

Das letztere kann durch eine eigentümliche Betrachtung auch noch auf andere Weise gefunden werden. Wir nehmen zu diesem Zwecke die Bildebene als die Ebene der Leitkurve $\mathbf{K}$ zweiten Grades des Konoides an und wählen das Projektionscentrum auf der Leitgeraden $\mathbf{l}$ [Fig. 253, Taf. XIX], wodurch sich die letztere als centralprojizierende Gerade, d. i. als ein Punkt $\mathbf{l}$ darstellt. Weiter stelle $\mathbf{R_v}$ die Fluchttrace der Richtebene vor.

Die Doppelerzeugende wird (§ 346) diesfalls jene Gerade $\mathbf{G}$ sein, welche durch $\mathbf{l}$ parallel zu $\mathbf{R_v}$ gezogen werden kann.

Durch diese Gerade $\mathbf{G}$ legen wir eine beliebige Ebene $\mathbf{E_v E_b}$ und bestimmen deren Schnitt mit dem Konoide, oder mit anderen Worten, wir suchen den geometrischen Ort der Schnittpunkte von $\mathbf{E_v E_b}$ mit allen Erzeugenden des Konoides.

Jede beliebig durch $\mathbf{l}$ geführte Gerade $\mathbf{g_1}$ stellt stets die Centralprojektion einer Konoiderzeugenden vor. Der Durchstosspunkt $\mathbf{d_1}$ derselben ergibt sich auf dem Leitkegelschnitte $\mathbf{K}$, der Fluchtpunkt $\mathbf{v_1}$ dagegen in der Fluchttrace $\mathbf{R_v}$.

Legen wir durch $\mathbf{g_1} = \mathbf{d_1 v_1}$ eine beliebige Hilfsebene $\mathbf{h_v h_b}$, welche $\mathbf{E_v E_b}$ in $\delta\varphi$ schneidet, so wird der Schnittpunkt $\mathbf{a_1}$ von $\mathbf{g_1}$ und $\delta\varphi$ gleichzeitig den Schnittpunkt von $\mathbf{g_1}$ mit $\mathbf{E_v E_b}$, also einen Punkt der Schnittkurve repräsentieren.

Bezeichnen wir weiter den Schnittpunkt von $\mathbf{h_v}$ und $\mathbf{G}$ mit γ, und den unendlich fernen Punkt von $\mathbf{h_v}$ und $\mathbf{h_b}$ mit δ_∞, so findet man, dass, — als Schnitte des Vierstrahles aus dem Scheitel δ — die beiden Punktwürfe

$$(\mathbf{l v_1 d_1 a_1}) \quad \text{und} \quad (\gamma \mathbf{v_1} \varphi \delta_\infty)$$

perspektivisch sind, dass also (nach Satz 3, § 165)

$$\frac{\mathbf{l d_1}}{\mathbf{v_1 d_1}} : \frac{\mathbf{l a_1}}{\mathbf{v_1 a_1}} = \frac{\gamma\varphi}{\mathbf{v_1}\varphi} : \frac{\gamma\delta_\infty}{\mathbf{v_1}\delta_\infty} = \frac{\gamma\varphi}{\mathbf{v_1}\varphi}$$

und dass mithin, infolge der Parallelität von $\mathbf{G}$, $\mathbf{R_v}$ und $\mathbf{E_v}$, das Verhältnis: $\frac{\gamma\varphi}{\mathbf{v_1}\varphi}$ konstant ist.

Die Centralprojektion der Schnittkurve ist somit auf die Leitkurve $\mathbf{K}$ derart bezogen, dass entsprechende Punkte auf Strahlen liegen, welche durch $\mathbf{l}$ gehen, und dass jedes Paar solcher entsprechender Punkte durch $\mathbf{l}$ und $\mathbf{R_v}$ in einem konstanten Doppelverhältnisse geteilt wird. Nachdem aber (§ 198) diese Beziehung eine kollineare ist, folgt, dass die Centralprojektion des ebenen Schnittes, also auch dieser selbst eine Kurve zweiten Grades sein muss.

Diese einfache Betrachtung zeigt, wie durch angemessene Verwendung der Methode der centralprojektivischen Darstellung geometrische Eigenschaften leicht entwickelt werden können. Als Beispiel ähnlicher Art kann auch das folgende Problem betrachtet werden.

§ 349.

123. Aufgabe: **Es ist der Richtungskegel der Wölbfläche in bezug auf seine Eigenschaften zu untersuchen.**

An früherer Stelle (§ 345) wurde bereits erwähnt, dass zwei Leitlinien der Wölbfläche zwei gleich grosse in parallelen Ebenen liegende Kreise sind. Denkt man sich nun die Ebene des einen Kreises K_1 [Fig. 254, Taf. XIX] als Bildebene angenommen und das Projektionscentrum in jenen Punkt C (im Raume) verlegt, welcher den Abstand der Mittelpunkte beider Leitkreise halbiert, so wird sich offenbar die Centralprojektion K_2 des zweiten zur Bildebene parallelen Leitkreises mit K_1 decken müssen.

Die Leitgerade l der Wölbfläche geht ebenfalls durch C, ist mithin centralprojizierend. Da dieselbe aber nebstbei zur Bildebene senkrecht stehen soll, so repräsentiert sie gleichzeitig den „Hauptstrahl"; ihre Centralprojektion reduziert sich daher auf den Hauptpunkt A.

Irgend eine durch A gezogene Gerade g_1 stellt somit stets die Centralprojektion einer Erzeugenden der Wölbfläche dar. Der Durchstosspunkt d_1 derselben liegt auf dem Kreise K_1, während der zweite Schnittpunkt a_1 von K_1 oder K_2 die Centralprojektion des auf dem Leitkreise K_2 liegenden Punktes darstellt.

Da der Punkt a_1 im Raume von der Bildebene doppelt so weit entfernt ist, als das Projektionscentrum C, so findet man leicht (allenfalls durch Umlegung um g_1), dass der Fluchtpunkt φ_1 von g_1 in der Mitte zwischen d_1 und a_1 liegt. Infolgedessen ist die Gerade, welche den Mittelpunkt δ von K_1, K_2 mit φ_1 verbindet, senkrecht auf g_1; der besagte Fluchtpunkt φ_1 liegt daher auf dem über $\delta A = \delta d$ als Durchmesser beschriebenen Kreise K_v.

In gleicher Weise findet man, dass K_v die Fluchtpunkte aller anderen Erzeugenden enthält, und daher die „Fluchtkurve" der Wölbfläche für die gewählte centralprojektivische Darstellung repräsentiert.

Der Kegel, welcher K_v zur Leitkurve und das Projektionscentrum **C** zum Scheitel hat, oder auch jeder beliebige zu diesem Kegel parallele Kegel kann als „Richtungskegel der Wölbfläche“ betrachtet werden.

Mithin ergeben sich als wesentliche Eigenschaften dieses Richtungskegels, dass derselbe a) vom zweiten Grade ist, b) von den zu den Leitkreisen parallelen Ebenen ebenfalls in Kreisen geschnitten wird, und dass c) eine seiner Erzeugenden (**CA**) zu den Ebenen der Leitkreise senkrecht, also zur Leitgeraden parallel ist.

IX. Abschnitt.

Aufwickelbare Flächen.

XIX. Kapitel.

Erzeugung aufwickelbarer Flächen.

§ 350.

Eine *„aufwickelbare“* oder *„developpable Fläche“* wurde (§ 259) als eine solche Fläche definiert, welche durch eine bewegliche Gerade unter der Bedingung erzeugt wird, dass jede Lage der letzteren von der unmittelbar vorausgehenden und von der unmittelbar folgenden geschnitten wird.

Dieser Bedingung kann in verschiedener Weise entsprochen werden. Vor allem offenbar dadurch, dass man alle die Fläche erzeugenden Geraden durch einen und denselben Punkt gehen lässt. Die hierbei entstehenden Kegelflächen waren bereits (Kap. XII und XV) Gegenstand unserer Betrachtung.

Die aufeinander folgenden Erzeugenden einer aufwickelbaren Fläche können sich aber auch schneiden, ohne dass dieselben sämtlich durch den nämlichen Punkt gehen. Diesen Fall wollen wir nun näher untersuchen.

Nehmen wir zu diesem Zwecke an, es seien t_1, t_2, t_3, t_4 ... [Fig. 255, Taf. XIX] der Reihe nach unmittelbar aufeinander folgende Erzeugende einer nach irgend einem beliebigen Erzeugungsgesetze entstandenen developpablen Fläche, so müssen sich, nach der allgemeinen Definition der letzteren, t_1 und t_2 in einem Punkte a_1, t_2 und t_3 in einem Punkte a_2, t_3 und t_4 in einem Punkte a_3 u. s. w. schneiden.

Da ferner die Erzeugenden der Fläche stetig aufeinander folgen, d. h. je zwei benachbarte sich der Lage nach nur unend-

lich wenig voneinander unterscheiden, so muss das Gleiche auch von den Punkten a_1, a_2, a_3 . . . gelten; der geometrische Ort dieser Punkte wird also eine Kurve und zwar eine *„Raumkurve“* **C** sein, da die Erzeugenden t_1, t_2 . . . , und mithin auch die Punkte a_1, a_2 . . . nicht sämtlich in einer Ebene liegen.

Die Erzeugenden t_1, t_2, t_3 . . . sind Tangenten dieser Kurve **C**, da jede von ihnen mit **C** zwei unendlich nahe Punkte a_1 und a_2; a_2 und a_3 u. s. w. gemein hat.

Infolge des bei dieser Betrachtung ganz unbestimmt gelassenen Erzeugungsgesetzes der aufwickelbaren Fläche folgt, dass überhaupt jede (von einer Kegelfläche verschiedene) developpable Fläche die gleiche Eigenschaft besitzen müsse, oder mit anderen Worten:

„Jede aufwickelbare Fläche repräsentiert gleichzeitig den geometrischen Ort der Tangenten einer Raumkurve.“

Die genannte Raumkurve wird, aus einem an späterer Stelle klar werdenden Grunde, als die *„Rückkehr- oder Kuspidalkurve“* der aufwickelbaren Fläche bezeichnet.

§ 351.

Denken wir uns auf einer aufwickelbaren Fläche, d. i. auf irgend einer Erzeugenden derselben, etwa auf t_2, einen beliebigen Punkt **p** angenommen und die Tangentialebene der Fläche in dem bezeichneten Punkte bestimmt.

Die besagte Tangentialebene wird einerseits (Satz 2, § 262) durch die Erzeugende t_2 gehen, anderseits aber auch die Tangente τ irgend einer durch **p** auf der Fläche gezeichneten Kurve **C'**, d. i. eine Gerade enthalten, welche **p** mit einem Punkte **p'** der unmittelbar folgenden Erzeugenden t_3 verbindet.

Hieraus erkennt man ohne weiteres, dass die obbezeichnete Tangentialebene der Fläche selbst durch die beiden unmittelbar aufeinander folgenden Erzeugenden t_2 und t_3 derselben vollkommen bestimmt sei.

Da man ferner, wenn statt **p** irgend ein beliebiger anderer Punkt auf t_2 gewählt würde, zu dem gleichen Resultate gelangt, so folgt, dass die durch zwei unendlich nahe (zusammenfallende) Erzeugenden einer developpablen Fläche gehende Ebene die Tangentialebene der Fläche in allen Punkten dieser (vereinigten) Erzeugenden repräsentiert. Daher besteht der Satz:

„Jede developpable Fläche wird in allen Punkten einer beliebigen Erzeugenden von einer und derselben Ebene, und zwar von jener Ebene berührt, welche durch die genannte Erzeugende und die unmittelbar folgende Erzeugende bestimmt ist."

§ 352.

Die Tangentialebenen einer aufwickelbaren Fläche stehen zu der Rückkehrkurve der letzteren in einer merkwürdigen Beziehung.

Stellen nämlich wieder t_1, t_2, t_3, t_4 . . . [Fig. 255, Taf. XIX] Erzeugenden einer developpablen Fläche, d. i. Tangenten der Kuspidalkurve **C** dieser Fläche vor, so hat eine beliebig durch eine solche Erzeugende, beispielsweise durch t_3, gelegte Ebene mit der Kurve **C** dieselben beiden unendlich nahen Punkte a_2 und a_3 gemein wie die Erzeugende t_3; sie repräsentiert also eine *„Berührebene"* der Raumkurve **C**, deren Berührungspunkt durch die Vereinigung der beiden unendlich nahen Punkte a_2 und a_3 dargestellt wird. Diese Berührebene kann jedoch mit der Kurve **C** noch weitere Punkte gemein haben, die im allgemeinen von a_2 und a_3 eine endliche Entfernung haben werden.

Setzen wir aber an Stelle der beliebig durch t_3 gelegten Ebene insbesondere die Tangentialebene der developpablen Fläche längs der Erzeugenden t_3, d. i. jene Ebene, welche auch die Erzeugende t_4 enthält, so hat dieselbe mit der Kurve **C** offenbar die drei unmittelbar aufeinander folgenden Punkte a_2, a_3 und a_4 gemein, und repräsentiert sonach eine besondere Berührebene von **C**, welche man als die *„Schmiegungsebene"* oder *„Oskulationsebene"* der Raumkurve **C** in jenem Punkte, welcher die drei unendlich nahen Kurvenpunkte in sich vereinigt, bezeichnet. Es besteht mithin der Satz:

„Die Tangentialebenen einer aufwickelbaren Fläche sind die Oskulationsebenen der entsprechenden Rückkehrkurve."

§ 353.

Aus den vorstehenden Betrachtungen erhellt, dass eine aufwickelbare Fläche auch als der geometrische Ort *(Enveloppe)* aller ihrer Tangentialebenen, d. i. einer einfach unendlichen Anzahl stetig aufeinander folgender Ebenen betrachtet werden kann.

Hierauf gründet sich ein wichtiges Erzeugungsgesetz für developpable Flächen. Es lässt sich nämlich leicht zeigen, dass eine veränderliche Ebene, welche in jeder Lage zwei gegebene Kurven C_1 und C_2 [Fig. 256, Taf. XIX] berührt, eine aufwickelbare Fläche erzeugt.

Bezeichnen wir, zum Zwecke dieses Nachweises, jene Lage der veränderlichen Ebene, in welcher sie die beiden Kurven C_1 und C_2 in a_1 resp. a_2 berührt, mit e_1. Diese Ebene e_1 enthält einerseits die Tangente t_1 der Kurve C_1 in a_1, d. i. jene Gerade, welche a_1 mit dem unmittelbar folgenden Punkte a'_1 von C_1 verbindet, und anderseits die Tangente t_2 von C_2 in a_2, d. h. die Gerade, welche a_2 mit dem unmittelbar folgenden Kurvenpunkte a'_2 verbindet. Die Ebene e_1 wird daher auch die beiden Geraden $g = a_1 a_2$ und $g' = a'_1 a'_2$ enthalten.

Die genannten Geraden g und g' schneiden sich notwendig in irgend einem Punkte o, liegen aber unendlich nahe aneinander, schliessen also einen unendlich kleinen Winkel ein.

Die auf die Lage e_1 unmittelbar folgende Lage der veränderlichen Ebene, welche e_2 heissen möge, wird selbstverständlich die unmittelbar auf t_1 und t_2 folgenden Tangenten $t'_1 = a'_1 a''_1$ und $t'_2 = a'_2 a''_2$ der Kurven C_1 und C_2 und mithin auch die Geraden $a'_1 a'_2 = g'$ und $a''_1 a''_2 = g''$ enthalten, welche wieder unmittelbar aufeinander folgen und sich in einem Punkte o' schneiden.

Setzt man diese Betrachtungen in gleicher Weise fort, so erhält man eine einfach unendliche Anzahl stetig aufeinander folgender Ebenen $e_1, e_2 \ldots$ und ebenso eine einfach unendliche Anzahl stetig aufeinander folgender Geraden $g, g', g'' \ldots$.

Da nun je zwei unmittelbar aufeinander folgende Lagen dieser Geraden sich in einem Punkte schneiden, so bilden sie in ihrer stetigen Aufeinanderfolge eine aufwickelbare Fläche, welche auch die Kurven C_1 und C_2 enthält, und deren Tangentialebenen keine anderen, als die vorgenannten Ebenen $e_1, e_2 \ldots$ sind.

Die beiden Kurven C_1 und C_2 können sonach als die *„Leitkurven“* der developpablen Fläche bezeichnet werden.

Bemerkung. Durch ähnliche Betrachtungen lässt sich auch nachweisen, dass eine veränderliche Ebene, welche in jeder Lage zwei gegebene feste krumme Flächen berührt, eine aufwickelbare Fläche erzeuge.

§ 354.

Führt man durch irgend einen Punkt **C** im Raume zu allen Erzeugenden **g**, **g'**, $\mathbf{g}_1$ ... [Fig. 257, Taf. XIX] einer Developpablen die Parallelen γ, γ', γ_1 ..., so werden die letzteren eine Kegelfläche bilden, welche man den *„Richtungskegel"* der aufwickelbaren Fläche zu nennen pflegt.

Sind **g** und **g'** zwei unmittelbar aufeinander folgende Erzeugenden der Developpablen, und γ und γ' die ihnen parallelen, also ebenfalls unmittelbar aufeinander folgenden Erzeugenden des Richtungskegels, so werden auch die beiden Ebenen (**gg'**) und ($\gamma\gamma'$) zu einander parallel sein. Da die erstere die Tangentialebene der developpablen Fläche längs der Erzeugenden **g**, die zweitgenannte dagegen die Tangentialebene des Richtungskegels längs der Erzeugenden γ ist, so gelangt man zu dem Satze:

„Die Tangentialebene einer developpablen Fläche längs einer ihrer Erzeugenden ist stets parallel zu der Tangentialebene des Richtungskegels längs der zu jener Erzeugenden parallelen Kegelerzeugenden."

Betrachtet man den Scheitel **C** des Richtungskegels insbesondere als Projektionscentrum, so werden die Kegelerzeugenden die Fluchtstrahlen der Erzeugenden der Developpablen repräsentieren, und mithin der Schnitt des Richtungskegels mit der Bildebene den geometrischen Ort der Fluchtpunkte aller jener Erzeugenden, d. i. die *„Fluchtkurve"* der aufwickelbaren Fläche vorstellen.

Da nun irgend eine Tangente der Fluchtkurve gleichzeitig die Bildflächtrace einer Tangentialebene des Flucht- oder Richtungskegels darstellt, so wird dieselbe, dem vorstehenden Satze gemäss, gleichzeitig die Fluchttrace einer Tangentialebene der Developpablen repräsentieren.

§ 355.

In § 352 wurde gezeigt, dass die Tangentialebene einer aufwickelbaren Fläche, als „Oskulationsebene" der zugehörigen „Rückkehrkurve", mit der letzteren stets drei unmittelbar aufeinander folgende Punkte gemein hat.

Aus diesem Umstande lassen sich für die centralprojektivische Darstellung einer Raumkurve sowohl, als auch für



die Bestimmung des ebenen Schnittes einer Developpablen bemerkenswerte Konsequenzen ziehen.

Setzen wir zu diesem Zwecke voraus, dass die Gerade **E** (Fig. 259) die vereinigten Tracen einer centralprojizierenden Ebene und **C** die Centralprojektion irgend einer Raumkurve vorstelle.

Verfolgen wir den Lauf dieser Kurve, indem wir allenfalls bei einem Kurvenpunkte **m** beginnen, welcher links von der Ebene **E** liegen mag. Bezeichnet **a** den ersten auf **m** folgenden Schnittpunkt der Kurve **C** mit der Ebene **E**, so wird offenbar das ganze Kurvenstück **ma** links von der Ebene **E** liegen. Bei **a** setzt sich die Kurve **C** so lange rechts von der Ebene **E** fort, bis sie endlich **E** in einem zweiten Punkte **b** trifft, von welchem Punkte aus sie wieder auf die linke Seite der Ebene **E** übergeht. Ist sodann **c** der drittfolgende Schnittpunkt, so liegt das Kurvenstück **bc** links von der Ebene **E**, während das weiter von **c** aus sich erstreckende Kurvenstück **cn** wieder rechts von **E** gelegen ist.

Man erkennt leicht, dass irgend zwei Stücke, wie beispielsweise **ma** und **cn**, der Kurve **C**, welche drei oder eine grössere ungerade Anzahl von Schnittpunkten zwischen sich haben, notwendig zu verschiedenen Seiten der Ebene **E** liegen. Das Gesagte gilt offenbar auch noch in dem Grenzfalle, wenn die drei Schnittpunkte **a**, **b** und **c** [Fig. 260, Taf. XIX] unendlich nahe aneinander rücken, die Kurvenstücke **ab** und **bc** also unendlich klein werden, oder mit anderen Worten, wenn die Ebene **E** eine Schmiegungsebene der Kurve **C** wird.

Das Bild der Kurve hat sodann in jenem Punkte, welcher die Centralprojektion des Schmiegungspunktes **abc** repräsentiert, einen *„Inflexions-“* oder *„Wendepunkt“*, dessen *„Wendetangente“* die Trace der centralprojizierenden Schmiegungsebene ist. Man hat sonach die Sätze:

„Die beiden von einem beliebigen Punkte einer Raumkurve ausgehenden und demselben zunächst liegenden Kurventeile liegen zu verschiedenen Seiten der jenem Punkte entsprechenden Schmiegungsebene der Kurve.“

Und ferner:

„Die Centralprojektion einer Raumkurve besitzt im allgemeinen eine gewisse Anzahl von Inflexionspunkten. Letztere sind die Bilder jener Punkte der Raumkurve, deren Oskulationsebenen durch das Projektionscentrum gehen. Die Tracen der genannten Ebenen repräsentieren die entsprechenden Inflexionstangenten.“

§ 356.

Es stelle **R** [Fig. 258, Taf. XIX] die Rückkehrkurve irgend einer developpablen Fläche und **E** eine beliebige Ebene vor. Die Schnittkurve der letzteren mit der Developpablen ergibt sich als geometrischer Ort der Schnittpunkte von **E** mit den Erzeugenden **g** . . . der Fläche.

Setzen wir weiter voraus, dass die Ebene **E** die Rückkehrkurve **R** in irgend einem Punkte **a** treffe. Die diesem Punkte **a** entsprechende Oskulationsebene **O** möge die Ebene **E** in der durch **a** gehenden Geraden **t** schneiden. Die Gerade **t** repräsentiert (Satz 2, § 262) die Tangente der Schnittkurve im Punkte **a**.

Bei näherer Betrachtung der dem Punkte **a** zunächst liegenden Teile der Rückkehrkurve finden wir diesfalls, dass der eine Teil der Kurve, d. i. **am** [Fig. 258, Taf. XIX], oberhalb der Ebene **E**, der andere Teil **an** derselben jedoch unterhalb der Ebene **E** liegt. Im Vorhergehenden (§ 355, Satz 1) wurde aber gezeigt, dass die beiden Kurventeile **ma** und **na** auch zu verschiedenen Seiten der Oskulationsebene **O** liegen, dass sich also beispielsweise im vorstehenden Falle der Teil **ma** hinter dieser Ebene, der Teil **na** dagegen vor derselben befinde.

Hieraus folgt, dass, wenn man nahe an **a** zwei Kurvenpunkte, etwa A_1 und A_4, den einen auf **ma**, den anderen aber auf **na** annimmt, die denselben entsprechenden Tangenten g_1 und g_4 der Rückkehrkurve **R** (d. s. Erzeugende der Developpablen) die Ebene **E** in zwei Punkten a_1 und a_4 treffen, welche ebenfalls zu verschiedenen Seiten der Tangente **t** liegen. Nachdem diese Punkte a_1 und a_4 einerseits der gesuchten Schnittkurve angehören, anderseits aber dem Punkte **a** nahe liegen, so erhellt, dass die Schnittkurve in **a** von der Geraden **t** berührt werde, und sich dann zu verschiedenen Seiten von **t** fortsetze, in **a** also eine *„Spitze“* oder einen *„Rückkehrpunkt“* oder *„Kuspidalpunkt“* bildet.

Diese Eigenschaft besitzt jeder ebene Schnitt einer Developpablen in jenen Punkten, welche der Rückkehrkurve angehören. Diesem Umstande verdankt die letztere Kurve ihren Namen.

§ 357.

124. Aufgabe: **Eine developpable Fläche ist durch ihre Schnittkurve mit der Bildebene und durch ihre Fluchtkurve gegeben. Parallel zu einer gegebenen Geraden sind die Tangentialebenen der Fläche, die zugehörigen Berührerzeugenden und die Inflexionstangenten der Centralprojektion der Rückkehrkurve zu konstruieren.**

Die Fluchtkurve der Developpablen, sowie der Schnitt der letzteren mit der Bildebene seien beziehungsweise durch C_v und C_B [Fig. 261, Taf. XIX] dargestellt.

Die Tangentialebene der Developpablen, welche zu der gegebenen Geraden DV parallel sein soll, kann leicht auf Grund der nachstehenden Betrachtung gefunden werden.

Zunächst muss die Fluchttrace E_v derselben einerseits durch V gehen, und anderseits (Schlussbemerkung in § 354) die Fluchtkurve C_v berühren. Da C_v als Kreis angenommen wurde, können durch V zwei Tangenten E_v^1 und E_v^3 an denselben geführt werden, deren jede die Fluchttrace einer der Aufgabe entsprechenden Tangentialebene repräsentiert.

Ferner ist ebenso leicht einzusehen, dass die Bildflächtrace jeder Tangentialebene die Kurve C_B berühren müsse.

Wir wissen nämlich, dass jede Tangentialebene der Developpablen die letztere in allen Punkten einer Erzeugenden, also auch in dem der Kurve C_B angehörenden Bildflächdurchstosspunkte dieser Erzeugenden berührt.

Zieht man demnach parallel zu E_v^1 an C_B die Tangenten E_b^1 und E_b^2, deren Berührungspunkte beziehungsweise d_1 und d_2 sein mögen, so wird sowohl $E_v^1 E_b^1$ als auch $E_v^1 E_b^2$ eine der Aufgabe entsprechende Tangentialebene repräsentieren. Bezeichnet v_1 den Berührungspunkt von E_v^1 mit C_v, so ergeben sich die diesen Ebenen entsprechenden Berührerzeugenden in $v_1 d_1$ und $v_1 d_2$. Ebenso liefert auch die Tangente E_v^3 von C_v eine zur Geraden DV parallele Berührebene $E_v^3 E_b^3$ mit der Berührerzeugenden $v_3 d_3$.

Nachdem endlich je zwei zu einander parallele Tangenten der beiden Kurven C_v und C_B stets die Tracen einer Tangentialebene der Developpablen (oder was dasselbe ist, einer Schmiegungsebene der zugehörigen Rückkehrkurve) repräsentieren, so wird offenbar jede gemeinschaftliche Tangente $J_v^1 J_b^1$, $J_v^2 J_b^2$, $J_v^3 J_b^3$ .... beider

Kurven die vereinigten Tracen einer centralprojizierenden Oskulationsebene oder (nach Satz 2, § 355) eine Inflexionstangente der Centralprojektion der Rückkehrkurve darstellen.

§ 358.

125. Aufgabe: **Eine Raumkurve ist durch ihre Centralprojektion und durch die Bildflächspur des durch dieselbe senkrecht zur Bildebene gelegten Cylinders gegeben; es soll die Oskulationsebene der Kurve in einem ihrer Punkte konstruiert werden.**

Sei R [Fig. 262, Taf. XIX] die Centralprojektion der Raumkurve, R' der Schnitt der Bildebene mit dem durch die Raumkurve normal zur Bildebene gelegten Cylinder, und a der beliebig auf R angenommene Punkt, dessen Schmiegungsebene bestimmt werden soll.

Die Gerade, welche a mit dem Hauptpunkte A verbindet, repräsentiert die dem Punkte a entsprechende Erzeugende des vorgenannten Hilfscylinders; ihr Durchstosspunkt a ergibt sich mithin im Schnitte a' mit R'. Die Tangentialebene des Hilfscylinders längs der Erzeugenden aA hat zur Bildflächtrace die Tangente h_b^a der Kurve R' im Punkte a', und zur Fluchttrace die durch A parallel zu h_b^a gezogene Gerade h_v^a.

Nachdem die Kurve R auf dem Cylinder liegt, so muss bekanntlich die Tangente g_a derselben im Punkte a in der Ebene $h_b^a h_v^a$ liegen; man erhält demnach ihren Bildflächdurchstosspunkt δ_a im Schnitte von g_a mit h_b^a.

In gleicher Weise kann man die Bildflächdurchstosspunkte δ_b, δ_c, ... beliebiger anderer Tangenten g_b, g_c, ... der Kurve R ermitteln, und wird man endlich in der Kurve C_B, welche diese Punkte δ_a, δ_b, δ_c ... stetig verbindet, den Schnitt der Bildebene mit der der Kurve R als Rückkehrkurve entsprechenden Developpablen erhalten.

Zieht man nun an diese Kurve C_B die Tangente O_b im Punkte δ_a, so repräsentiert dieselbe gleichzeitig die Bildflächtrace der die Developpable längs der Erzeugenden g_a berührenden Tangentialebene, oder was dasselbe ist, der Oskulationsebene der Raumkurve R im Punkte a. Die Fluchttrace O_v ist die durch den Fluchtpunkt φ_a von g_a (Schnitt von h_v^a und g_a) zu O_b parallel geführte Gerade.

§ 359.

126. Aufgabe: **Durch eine in einer beliebigen Ebene $E_v E_b$ [Fig. 263, Taf. XIX] liegende Kurve K zweiten Grades ist eine „Fläche konstanter Neigung α" gegen die Bildebene zu legen, und sind die durch einen gegebenen Punkt gehenden Tangentialebenen derselben zu bestimmen.**

Unter einer durch eine Kurve gelegten Fläche konstanter Neigung α gegen eine Ebene versteht man jene durch die Kurve gelegte aufwickelbare Fläche, deren Erzeugenden und Tangentialebenen mit der genannten Ebene den Winkel α einschliessen, welche also die obige Kurve zur Leitlinie hat, während der Richtungskegel der bezeichneten Fläche durch einen geraden Kreiskegel, dessen Erzeugenden mit der Ebene den gegebenen Winkel α einschliessen, dargestellt ist.

Nachdem im vorliegenden Falle alle Erzeugenden und Tangentialebenen der Developpablen mit der Bildebene den Winkel α einschliessen sollen, wird notwendig der dem Winkel α entprechende Fluchtkreis K_α gleichzeitig die Fluchtkurve der Developpablen darstellen. Man kann sonach mit Hilfe desselben und der Leitkurve K beliebige Erzeugenden der Fläche leicht, wie folgt, konstruieren.

Durch einen beliebig auf der Leitkurve K angenommenen Punkt z_1 geht stets eine (oder richtiger zwei) Erzeugende g_1 der Developpablen. Die dieser Erzeugenden entsprechende Berührebene muss selbstverständlich die Tangente $t_1 = v'_1 d'_1$ der Leitkurve K im Punkte z_1 enthalten. Die Fluchttrace b'_v dieser Berührebene kann offenbar nur eine von v'_1 an die Fluchtkurve K_α geführte Tangente sein. Der Berührungspunkt v_1 derselben repräsentiert sodann notwendig den Fluchtpunkt der vorgenannten durch z_1 gehenden Erzeugenden g_1, womit die letztere vollständig bestimmt ist. In gleicher Weise können nun beliebig viele andere Erzeugenden der Fläche konstruiert werden.

Um an diese Developpable konstanter Bildflächneigung durch den gegebenen Punkt p (auf dem zur Bildebene senkrechten Träger $A\pi$) Berührebenen zu legen, stellen wir folgende Betrachtung an.

Eine durch p gehende Berührebene der Developpablen muss, da sie mit der Bildebene den Winkel α einschliesst, notwendig

auch jenen geraden Kreiskegel berühren, welcher seinen Scheitel in p hat und dessen Erzeugenden unter dem Winkel α gegen die Bildebene geneigt sind.

Die Bildflächtrace einer solchen Ebene wird demgemäss eine Tangente jenes Kreises K_1 sein, in welchem die Bildebene von dem genannten Hilfskegel geschnitten wird. Besagter Kreis K_1 kann mittels des Abstandes $p_0\pi$ des Punktes p von der Bildebene auf bekannte Weise leicht konstruiert werden.

Die gesuchte Tangentialebene berührt ferner in irgend einem Punkte jede auf der Developpablen liegende Kurve, also auch die Leitkurve K; sie wird mithin auch eine Tangentialebene jenes Kegels sein, dessen Scheitel p ist, und welcher die Kurve K zur Leitkurve hat.

Bestimmt man nun die Schnittkurve K' des letztgenannten Hilfskegels mit der Bildebene (vermittels zweier konjugierter Durchmesser AB und CD), so wird man als Bildflächtrace der gesuchten Tangentialebene jede der vier gemeinschaftlichen Tangenten von K_1 und K' betrachten können.

Wählen wir beispielsweise die gemeinschaftliche Tangente B_b als Bildflächtrace. Die zugehörige Fluchttrace B_v ist, wie leicht erkennbar, die mit B_b, in bezug auf den Punkt p als Ähnlichkeitspunkt, ähnlich gelegene Tangente B_v des Kreises K_α.

Die beiden Ebenen $E_v E_b$ und $B_b B_v$ schneiden sich in einer Geraden dv, welche notwendig die Leitkurve K in einem Punkte n berühren muss. Die Berührerzeugende der Tangentialebene $B_v B_b$ hat ihren Fluchtpunkt V im Berührungspunkte von K_α und B_v, und geht nebstbei durch n; wird demnach durch VD dargestellt erscheinen.

§ 360.

127. Aufgabe: **Eine developpable Fläche ist durch ihre Schnittkurve mit der Bildebene und durch ihre Fluchtkurve gegeben. Der Schnitt dieser Fläche mit einer gegebenen Ebene und insbesondere die Asymptoten der Schnittkurve sollen konstruiert werden.**

Die Fluchtkurve der Developpablen sei C_v [Fig. 264, Taf. XIX], die Bildflächspur C_B. Die schneidende Ebene ist $E_v E_b$.

Die zu bestimmende Schnittkurve kann aufgefasst werden als der geometrische Ort der Schnittpunkte aller Erzeugenden

mit der Ebene E; oder aber auch (Satz 2, § 262) als die Einhüllende der Schnittgeraden der Ebene $E_v E_b$ mit allen Tangentialebenen der Developpablen. In der konstruktiven Ausführung lassen sich beide Auffassungen zugleich verwerten.

Wir wissen bereits, dass die Tracen h'_v und h'_b irgend einer Tangentialebene der Developpablen durch zwei beliebige zu einander parallele Tangenten der beiden Kurven C_v und C_B repräsentiert sind, und dass der Schnitt t' von $h'_v h'_b$ mit $E_v E_b$ eine Tangente der gesuchten Schnittkurve vorstelle. Die bezüglichen Berührungspunkte φ' und δ' von h'_v und h'_b mit C_v und C_B repräsentieren beziehungsweise den Fluchtpunkt und Durchstosspunkt der Berührerzeugenden g_1 der Tangentialebene $h'_v h'_b$; der Schnittpunkt p' von $\delta' \varphi'$ mit $d'v' = t'$ wird mithin ein Punkt der Schnittkurve C und zugleich der Berührungspunkt von t' sein. In gleicher Weise kann man beliebig viele Punkte und die ihnen entsprechenden Tangenten der Schnittkurve C konstruieren.

Die Fluchttrace E_v schneidet ferner die Fluchtkurve C_v in den Punkten v_1, $v_2 \ldots$, welche die Centralprojektionen der unendlich fernen Punkte der Schnittkurve C vorstellen.

Zieht man in v_1 die Tangente H'_v an C_v und zu derselben parallel die Tangente H'_b an C_B (wobei der der letzteren entsprechende Berührungspunkt δ_1 heisse), so stellt $H'_v H'_b$ die Tangentialebene der Developpablen längs der Erzeugenden $v_1 \delta_1$, also auch die Berührebene in dem unendlich fernen Punkte v_1 derselben vor. Der Schnitt $\Sigma_1 = v_1 d_1$ von $H'_b H'_v$ und $E_b E_v$ wird daher (Satz 2, § 262) die Tangente der Schnittkurve C in dem unendlich fernen Punkte v_1, d. i. eine Asymptote von C sein. Die übrigen Asymptoten $\Sigma_2 \ldots$ können in gleicher Weise wie Σ_1 bestimmt werden.

§ 361.

128. Aufgabe: **Als Leitlinien einer developpablen Fläche sind zwei Kurven zweiten Grades in verschiedenen Ebenen derart gegeben, dass dieselben die Schnittgerade dieser Ebenen in zwei verschiedenen Punkten berühren. Es ist eine Erzeugende dieser Fläche zu konstruieren und ihr Berührungspunkt mit der entsprechenden Kuspidalkurve zu ermitteln.**

Der Einfachheit halber denken wir uns die eine Leitkurve — K_1 — [Fig. 265, Taf. XX] in der Bildebene liegend. Gemäss

unserer Voraussetzung muss sodann die Bildflächtrace E_b der Ebene E der zweiten Leitkurve die Kurve K_1 in einem Punkte Δ berühren, und weiter auch als Tangente an die zweite Leitkurve K_2 in einem von Δ verschiedenen Punkte δ erscheinen.

Wie in § 353 gezeigt wurde, sind alle Ebenen, welche K_1 und K_2 zu gleicher Zeit berühren, Tangentialebenen der Developpablen, während die Verbindungsgeraden jener Punktepaare, in welchen diese Ebenen die beiden Leitkurven berühren, die zugehörigen Berührungserzeugenden liefern.

Wählt man nun auf der Bildflächtrace E_b, d. i. auf der gemeinschaftlichen Tangente beider Leitkurven einen beliebigen Punkt α, so werden die von demselben an K_1 und K_2 gezogenen, in p_1 resp. p_2 berührenden Geraden $l_1 = B_b$ und $l_2 = B_r$ eine Tangentialebene der Developpablen bestimmen, deren Berührungserzeugende die Verbindungsgerade $p_1 p_2 = g$ ist.

Um den Punkt, in welchem die Erzeugende g die Kuspidalkurve berührt, d. h. jenen Punkt zu finden, in welchem die Erzeugende g von der unmittelbar folgenden Erzeugenden geschnitten wird, wollen wir untersuchen, welche Erzeugende überhaupt die Erzeugende g trifft, und bestimmen zu diesem Zwecke den geometrischen Ort der Schnittpunkte aller übrigen Erzeugenden mit der vorgenannten Tangentialebene (B_b, B_r), d. i. die Schnittkurve der letzteren mit der Developpablen. Diese Schnittkurve kann aber, wie bekannt, auch als die Einhüllende der Schnittgeraden der Tangentialebene (B_b, B_r) mit allen übrigen Tangentialebenen betrachtet werden, woraus sich nachstehende Konstruktion ergibt.

Wählen wir auf E_b irgend einen zweiten Punkt β und ziehen von demselben an K_1 und K_2 die bezüglichen Tangenten $\beta\beta_1$ und $\beta\beta_2$, so erhalten wir im Schnitte β_1 der beiden in der Bildebene liegenden Geraden $\beta\beta_1$ und B_b einen Punkt, welcher der Tangentialebene (B_b, B_r) und der durch die beiden Geraden $\beta\beta_1$ und $\beta\beta_2$ bestimmten Tangentialebene angehört; ferner ergibt sich im Schnitte β_2 der beiden (in der Ebene der Leitkurve K_2 liegenden) Geraden $\beta\beta_2$ und B_r ein zweiter gemeinschaftlicher Punkt der beiden vorgenannten Tangentialebenen. Die Gerade $\beta_1\beta_2$ ist daher die Schnittgerade der Tangentialebene (B_b, B_r) mit der Tangentialebene $\beta\beta_1\beta_2$.

Die von einem beliebigen dritten Punkte γ der Trace E_b an K_1 und K_2 geführten Tangenten $\gamma\gamma_1$ und $\gamma\gamma_2$ bestimmen wieder

eine Tangentialebene der Developpablen, deren Schnittgerade mit der Tangentialebene (B_b, B_r) jene Gerade ist, welche die Schnittpunkte γ_1 und γ_2 der Geradenpaare $\gamma\gamma_1$ und B_b resp. $\gamma\gamma_2$ und B_r verbindet. In übereinstimmender Weise kann der Schnitt jeder beliebigen anderen Tangentialebene mit der Ebene (B_b, B_r) ermittelt werden.

Als Enveloppe aller sich hierbei ergebenden Schnittgeraden $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$, ... erhält man die Schnittkurve der Developpablen mit der Tangentialebene (B_b, B_r).

Besagte Kurve ist, wie leicht erkennbar, eine Kurve zweiten Grades. Die Punktreihen ($\beta\gamma$ ...) und ($\beta_1\gamma_1$ ...), welche die Tangenten $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$ ... der Kurve K_1 auf den beiden Tangenten E_b und B_b dieser Kurve bestimmen, sind nämlich (Satz 1, § 141) projektivisch, und gilt dasselbe auch von den beiden Reihen ($\beta\gamma$ ...) und ($\beta_2\gamma_2$ ...), in welchen die Geraden E_b und B_r von den Tangenten der Kurve K_2 getroffen werden. Es sind daher auch die Punktreihen ($\beta_1\gamma_1$ ...) und ($\beta_2\gamma_2$ ...) untereinander projektivisch, und die Verbindungsgeraden $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$ ... entsprechender Punkte erzeugen mithin eine Kurve C zweiten Grades, welche auch die Geraden B_b und B_r (Träger jener Reihen) berührt.

Rückt man ferner mit dem Punkte β ohne Aufhören immer näher an α bis zur Koincidenz, so werden, wie ohne jedwede Schwierigkeit zu entnehmen, die Punkte β_1 und β_2 in die Grenzlagen p_1 und p_2 übergehen; es sind sonach p_1 und p_2 ebenfalls zwei entsprechende Punkte der beiden Reihen ($\beta_1\gamma_1$ ...) und ($\beta_2\gamma_2$ ...), und ist mithin die früher gefundene Erzeugende g auch eine Tangente der Kurve C.

Führt man ferner von dem Berührungspunkte δ von E_b und K_2 an K_1 die Tangente $\delta\delta_1$, so sind auch δ_1 und $\delta_2 = \alpha$ zwei entsprechende Punkte der Reihen ($\beta_1\gamma_1$ ...) und ($\beta_2\gamma_2$ ...), d. h. δ_1 ist (nach § 140) der Berührungspunkt der Kure C mit der Geraden B_b.

Aus den vier Tangenten B_b, B_r, $\gamma_1\gamma_2$, $\mathsf{p}_1\mathsf{p}_2$ und dem Berührungspunkte δ_1 der ersten kann (Satz 1 oder 3, § 145) auch der Berührungspunkt P von $\mathsf{p}_1\mathsf{p}_2$ dadurch gefunden werden, dass man den Diagonaleckpunkt η des vollständigen Vierseites B_b, B_r, $\gamma_1\gamma_2$ und $\mathsf{p}_1\mathsf{p}_2$ bestimmt, η mit δ_1 verbindet und im Schnitte von $\eta\delta_1$ mit $\mathsf{p}_1\mathsf{p}_2$ den gesuchten Punkt P bestimmt.

Nachdem die Kurve C als Schnitt der Developpablen mit der Ebene (B_b, B_r) den geometrischen Ort der Schnittpunkte aller Er-

zeugenden der Fläche mit der Ebene (B_b, B_r) repräsentiert, so ist der Punkt P der einzige, in welchem die Erzeugende g von einer anderen Erzeugenden getroffen wird; derselbe ist mithin notwendig der Berührungspunkt dieser Erzeugenden g mit der Kuspidalkurve der Developpablen.

Wie den angestellten Betrachtungen zu entnehmen ist, besitzt die in Rede stehende developpable Fläche interessante projektivische Eigenschaften, auf die wir hier jedoch nicht näher eingehen können. Die Fläche ist von der vierten Ordnung; ihre Kuspidalkurve dagegen ist eine Raumkurve dritter Ordnung.

X. Abschnitt.

Die Rotationsflächen.

XX. Kapitel.

Eigenschaften und Konstruktionen.

§ 362.

Wenn sich irgend eine krumme Linie **C** um eine beliebige fest im Raume angenommene Gerade **Z** dreht, so beschreiben alle Punkte von **C** Kreise, welche in zur Geraden **Z** senkrechten Ebenen liegen; die Mittelpunkte all dieser Kreise liegen auf der besagten Geraden **Z**.

Den geometrischen Ort aller Lagen, welche die vorgenannte krumme Linie bei einer vollen Umdrehung um die Gerade **Z** einnehmen kann, pflegt man eine *„Umdrehungsfläche“*, *„Rotations“*- oder *„Revolutionsfläche“* zu nennen, während die feste Gerade **Z** als die *„Drehachse“*, *„Rotationsachse“* oder kurz als die *„Achse“* dieser Fläche bezeichnet wird.

Es ist einleuchtend, dass die Kreise, welche die einzelnen Punkte der Kurve **C** bei der Umdrehung um **Z** beschreiben, der Fläche selbst angehören müssen; man bezeichnet dieselben, da sie in zur Drehachse senkrechten Ebenen liegen und mithin sämtlich untereinander parallel sind, als die *„Parallelkreise“* der Rotationsfläche.

Diese Parallelkreise können als ein System von „erzeugenden Kurven“ für die Rotationsfläche betrachtet werden, oder mit anderen Worten jede Rotationsfläche kann als Ort der Lagen eines veränderlichen Kreises angesehen werden, dessen Ebene zu einer festen Geraden (Drehachse) senkrecht steht, dessen Peripherie stets eine feste Kurve **C** im Raume trifft und dessen Mittelpunkt ununterbrochen auf der genannten Drehachse liegt.

Denkt man sich eine Rotationsfläche durch Umdrehung irgend einer Kurve **C** um eine Achse **Z** erzeugt, und hierauf eine zweite Kurve **C'**, welche alle Parallelkreise trifft, sonst aber beliebig ist, auf der Fläche verzeichnet, so wird die besagte Kurve, um **Z** gedreht, dieselben Parallelkreise beschreiben, also auch die nämliche Rotationsfläche, wie die Kurve **C**, hervorbringen.

Hieraus folgt der Satz:

„Jede Rotationsfläche kann auf unendlich viele verschiedene Arten durch Umdrehung einer Kurve um die Drehachse erzeugt werden."

Unter allen Kurven, welche durch Umdrehung um die Achse **Z** die Rotationsfläche erzeugen, sind die wichtigsten die *„Meridiane"*, d. h. jene Kurven, welche sich im Schnitte der Rotationsfläche mit den durch die Drehachse **Z** gelegten Ebenen ergeben.

Stellen wir uns beispielsweise unter **Z** [Fig. 266, Taf. XX] die Drehachse, unter K_1, K_2, K_3 . . . verschiedene Parallelkreise einer Rotationsfläche vor und nehmen wir an, dass irgend eine durch die Drehachse **Z** gelegte Ebene **E** die Umdrehungsfläche in der Meridiankurve **M** schneide. Die letztbezeichnete Kurve **M** ist offenbar gleichzeitig der geometrische Ort der Punkte, in welchen die Ebene **E** die Parallelkreise K_1, K_2, K_3 . . . trifft.

Nachdem die Mittelpunkte o_1, o_2, o_3 . . . der Parallelkreise K_1, K_2, K_3 . . . auf der Drehachse **Z** liegen, so werden die letzteren von der Ebene **E** in Punktepaaren a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3; . . . so getroffen, dass $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$ . . . Durchmesser dieser Kreise repräsentieren, oder dass mit anderen Worten, die Punktepaare a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3; . . . symmetrisch gegen die Drehachse liegen. Da aber weiter die genannten Punktepaare der Meridiankurve **M** angehören, so folgt unmittelbar, dass auch diese symmetrisch gegen die Drehachse **Z** ist.

Selbstverständlich kann die Rotationsfläche auch durch Umdrehung der Meridiankurve **M** um **Z** erzeugt werden, und es ist klar, dass hierbei die einzelnen Lagen **M'**, **M''** . . ., welche **M** bei der Drehung annimmt, selbst wieder Meridiankurven, d. h. Schnitte der Rotationsfläche mit Ebenen, welche die Achse **Z** enthalten, darstellen müssen. Es ergibt sich mithin der Satz:

„Die sämtlichen Meridiankurven einer Rotationsfläche sind symmetrisch gegen die Drehachse gelegene und untereinander kongruente Kurven."

Aus der Symmetrie der Meridiankurve gegen die Drehachse folgt, dass zur Erzeugung der Rotationsfläche durch die erstere eine halbe Umdrehung hinreicht.

§ 363.

Denken wir uns, wie vorher, eine Rotationsfläche mit einer durch die Achse **Z** [Fig. 266, Taf. XX] gehenden Ebene **E** nach der Meridiankurve **M** geschnitten, und seien a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 . . . die Durchmesser, in welchen die Parallelkreise K_1, K_2, K_3 . . . von der Ebene **E** geschnitten werden.

Nachdem alle diese Parallelkreise K_1, K_2, K_3, . . . durch die entsprechenden Durchmesser a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 . . . symmetrisch geteilt werden, und überdies ihre Ebenen zur Ebene **E** senkrecht stehen, so folgt, dass die genannten Parallelkreise, und mithin auch der geometrische Ort derselben, d. i. die Rotationsfläche selbst, gegen die Ebene **E** symmetrisch liegen. Daher der Satz:

„Eine Rotationsfläche wird durch jede ihrer Meridianebenen in zwei symmetrische Hälften geteilt.“

Wird ferner eine Rotationsfläche durch eine beliebige Ebene **e** in einer Kurve **C** geschnitten, so lässt sich leicht zeigen, dass auch diese Kurve eine Symmetrieachse besitze.

Es ist einleuchtend, dass jede Ebene durch eine zu ihr senkrechte Ebene symmetrisch geteilt wird.

Wenn man nun senkrecht zur Ebene **e** durch die Achse **Z** die Meridianebene **E** legt, so ist dieselbe gleichzeitig für die Ebene **e** und für die Rotationsfläche eine Symmetrieebene, und folglich auch eine Symmetrieebene für die Schnittkurve **C**. Die Symmetrieachse für die letztere ergibt sich offenbar als die Schnittgerade der beiden Ebenen **E** und **e**. Es gilt also der Satz:

„Jeder ebene Schnitt einer Rotationsfläche ist durch die, der schneidenden Ebene und der zur letzteren senkrechten Meridianebene gemeinsamen Geraden symmetrisch geteilt.“

§ 364.

Die Tangentialebene einer krummen Fläche in irgend einem ihrer Punkte ist, wie wir (§ 262) bereits wissen, durch zwei Tangenten der Fläche in dem betreffenden Punkte bestimmt.

Ist die Fläche eine Rotationsfläche, so geht durch einen beliebigen Punkt c_1 derselben [Fig. 266, Taf. XX] stets ein

Parallelkreis K_1 sowohl als auch eine Meridiankurve M'. Die Tangenten t_1 und c_1S_1 dieser beiden Kurven sind aber auch Tangenten der Fläche im Punkte c_1 und bestimmen mithin die vorgenannte Tangentialebene.

Man erkennt sofort, dass die Tangente t_1 des Parallelkreises K_1 im Punkte c_1 zu der durch c_1 gehenden Meridianebene senkrecht steht; das Gleiche wird daher auch von der durch t_1 gehenden Tangentialebene gelten. Es besteht daher der Satz:

„Die Tangentialebene einer Rotationsfläche ist stets senkrecht zu der durch den entsprechenden Berührungspunkt gehenden Meridianebene.“

Wenden wir den vorstehenden Satz auf alle Punkte $c_1, c_2, c_3 \ldots$ einer und derselben Meridiankurve M' [Fig. 266, Taf. XX] an, so ergibt sich, dass die vorgenannten Tangentialebenen jenen Cylinder einhüllen, als dessen Leitkurve man die Meridiankurve M' selbst betrachten kann, und dessen Erzeugenden zur Ebene der letzteren senkrecht stehen. Daher besteht der Satz:

„Eine Rotationsfläche wird längs einer jeden Meridiankurve von einem Cylinder berührt, dessen Erzeugenden zur Ebene der betreffenden Meridiankurve senkrecht stehen.“

§ 365.

Führt man an die Meridiankurve M einer Rotationsfläche [Fig. 266, Taf. XX] eine beliebige Tangente a_1S_1, so muss dieselbe notwendig die Drehachse Z in einem Punkte S_1 treffen.

Dreht man nun die Kurve M sowohl, als auch die Tangente a_1S_1 derselben um Z, so wird M die Rotationsfläche, die Tangente a_1S_1 dagegen einen Umdrehungskegel erzeugen, dessen Scheitel S_1 und dessen Achse Z ist. Der Berührungspunkt a_1 durchläuft hierbei den Parallelkreis K_1, welcher, wie an und für sich klar, auch dem vorbezeichneten Kegel angehört.

Nachdem jede Erzeugende des vorgenannten Kegels gleichzeitig eine Tangente einer gewissen Meridiankurve, also auch der Umdrehungsfläche selbst in einem Punkte des Parallelkreises K_1 ist, so stellt derselbe offenbar jenen Kegel vor, welcher der Rotationsfläche vom Punkte S_1 als Scheitel umschrieben ist und dieselbe längs des Parallelkreises K_1 berührt. Die Tangentialebenen der Rotationsfläche in den Punkten von K_1 sind sodann selbstverständlich auch Tangentialebenen (§ 264) des Kegels (S_1, K_1). Es gilt sonach der Satz:

„Eine Rotationsfläche wird längs jedes Parallelkreises von einem geraden Kreiskegel (Umdrehungskegel) berührt, dessen Achse mit der Drehachse identisch ist.“

Denkt man sich an Stelle einer beliebigen Tangente eine zur Rotationsachse parallele Tangente der Meridiankurve gewählt, so wird dieselbe bei der Umdrehung um die Achse Z speziell einen der Rotationsfläche längs eines bestimmten Parallelkreises umschriebenen Rotationscylinder erzeugen.

Ein derartiger Parallelkreis wird ein *„Äquatorialkreis“* oder ein *„Kehlkreis“* genannt, je nachdem die Rotationsfläche längs desselben beziehungsweise ihre konkave oder ihre konvexe Fläche der Drehachse zukehrt.

§ 366.

Die theoretischen Betrachtungen über Rotationsflächen wollen wir mit einer Erörterung abschliessen, welche gelegentlich der centralprojektivischen Darstellung dieser Flächen von Nutzen sein kann.

Seien M' und M'' [Fig. 266, Taf. XX] irgend zwei Meridiankurven einer Rotationsfläche, welche die Parallelkreise $K_1, K_2, K_3 \dots$ in den Punkten $c_1, d_1, e_1, f_1;$ $c_2, d_2, e_2, f_2;$ $c_3, d_3, e_3, f_3; \dots$ schneiden mögen.

Zieht man die Kreissehnen $c_1 e_1$, $d_1 f_1$, $c_2 e_2$, $d_2 f_2$, $c_3 e_3$, $d_3 f_3, \dots$ so findet man, dass dieselben sämtlich zu der einen Ebene, welche den Winkel der Meridianebenen von M' und M'' halbiert, senkrecht stehen, also untereinander parallel sind. (Man vergl. auch die Betrachtungen in §§ 47 und 48.) Dieses Ergebnis sagt nichts anderes aus, als dass man durch die beiden Kurven M' und M'' einen Cylinder legen könne, dessen Erzeugenden die genannten Kreissehnen sind.

Das Gleiche gilt offenbar auch von den Sehnen $c_1 f_1$, $e_1 d_1$, $c_2 f_2$, $e_2 d_2 \dots$, welche zu der zweiten Winkelhalbierebene von M' und M'' senkrecht stehen, also einen zweiten Cylinder bestimmen. Es besteht mithin der Satz:

„Durch zwei beliebige Meridiankurven einer Rotationsfläche kann man stets zwei Cylinderflächen legen. Die Erzeugenden derselben sind normal zu den zwei Ebenen, welche die Winkel zwischen den beiden Meridianebenen halbieren.“

§ 367.

129. Aufgabe: **Es ist die Kontur einer Rotationsfläche, deren Achse zur Bildebene senkrecht steht, in centraler Projektion zu konstruieren.**

Sei **A** [Fig. 267, Taf. XX] der Hauptpunkt, hier also gleichzeitig Fluchtpunkt der Drehache **Z**, **D** der Durchstosspunkt der letzteren und **M** die Centralprojektion der Hälfte einer beliebigen Meridiankurve, etwa derjenigen, welche in der Ebene $M_b M_v$ liegt.

Nachdem die Rotationsachse **Z** zur Bildebene senkrecht steht, werden die sämtlichen Parallelkreise zur Bildebene parallel sein und mithin, centralprojektivisch dargestellt, unmittelbar wieder als Kreise erscheinen.

Nehmen wir auf **Z** einen beliebigen Punkt o_1 als Mittelpunkt eines Parallelkreises an, und ziehen wir die zur Trace M_b der Meridianebene $M_v M_b$ parallele Gerade $o_1 a_1$, so repräsentiert dieselbe offenbar die Centralprojektion einer zur Bildebene parallelen, in der Ebene $M_b M_v$ liegenden Geraden, d. i. einen Radius der Centralprojektion des dem Punkte o_1 entsprechenden Parallelkreises. Die Centralprojektion K_1 dieses Parallelkreises wird demnach jener Kreis sein, der aus o_1 mit dem Radius $o_1 a_1$ beschrieben wird.

Denkt man sich in gleicher Weise die Centralprojektionen K_2, K_3, . . . beliebig vieler Parallelkreise konstruiert, so wird man die verlangte Kontur als die die Kreise K_1, K_2, K_3 . . . einhüllende Kurve erhalten.

§ 368.

130. Aufgabe: **Es ist die Kontur einer Rotationsfläche zu konstruieren, deren Achse in der Bildebene liegt.**

Sind **Z** [Fig. 268, Taf. XX] die in der Bildebene gegebene Rotationsachse, M_b die gleichfalls in der Bildebene (welche offenbar gleichzeitig eine Meridianebene ist) liegende Meridiankurve, **A** der Hauptpunkt und AC_0 die umgelegte Distanz, so kann man zum Behufe der Konstruktion der Kontur von dem in § 365 aufgestellten Satze folgenden Gebrauch machen.

Die durch **A** senkrecht zu **Z** geführte Gerade e_v repräsentiert den Voraussetzungen entsprechend die gemeinschaftliche Fluchttrace aller Parallelkreisebenen, während jede beliebig zu e_v parallel



gezogene Gerade e'_b stets die Bildflächtrace einer solchen Parallelkreisebene darstellen wird. Der betreffende Parallelkreis hat seinen Mittelpunkt o_1 im Schnitte von e'_b und Z, während der Radius desselben durch die Strecke $o_1 a_1$ gegeben ist, welche auf e'_b durch Z und M_b bestimmt wird.

Zieht man weiter in a_1 an die Meridiankurve M_b die Tangente τ_1, so erhalten wir (dem vorher angeführten Satze, § 365, gemäss) im Schnitte s_1 von Z und τ_1 den Scheitel jenes Kegels, welcher der Rotationsfläche längs des in der Ebene $e_v e'_b$ befindlichen Parallelkreises K_1 umschrieben ist.

Die durch s_1 an die Centralprojektion von K_1 gezogenen Tangenten sind (nach § 309) die Konturgeraden des umschriebenen Kegels, und da dieselben überdies die Bildflächtracen der beiden centralprojizierenden Tangentialebenen dieses Kegels (also auch der Rotationsfläche) vorstellen, so repräsentieren sie gleichzeitig auch zwei Tangenten der gesuchten Konturkurve.

Um diese beiden Geraden zu erhalten, betrachten wir (wie in § 309) den Punkt s_1 für einen Augenblick als die Centralprojektion eines in der Ebene $e_v e'_b$ liegenden Punktes, und legen ihn in dieser Eigenschaft um e'_b nach s_1^0 in die Bildebene um. Die von s_1^0 an den umgelegten Parallelkreis K_1^0 gezogenen Tangenten t'_0 und t''_0 treffen e_b beziehungsweise in δ' und δ'' so, dass man ihre Centralprojektionen in $t' = s_1 \delta'$ und $t'' = s_1 \delta''$ dargestellt erhält.

Die Berührungspunkte p' und p'' derselben mit der Centralprojektion des Parallelkreises K_1 ergeben sich mittels der Strahlen $C_0 p'_0$ und $C_0 p''_0$, wenn p'_0 und p''_0 die Berührungspunkte von K_1^0 mit t'_0 und t''_0 bedeuten.

Wie bereits vorher gezeigt wurde, sind nun t' und t'' die Bildflächtracen zweier centralprojizierenden Ebenen, welche die Rotationsfläche in p' resp. p'' berühren, d. h. zwei Tangenten der Konturkurve, deren Berührungspunkte beziehungsweise in p' und p'' dargestellt sind.

Durch die willkürliche Wahl anderer Parallelkreisebenen können auf gleiche Weise beliebig viele Tangenten der Konturkurve samt ihren Berührungspunkten ermittelt und so die vollständige Kontur der Rotationsfläche festgestellt werden.

§ 369.

131. Aufgabe: **Die Kontur einer Rotationsfläche ist zu konstruieren, wenn deren Achse parallel zur Bildebene liegt.**

Setzen wir voraus, **Z** [Fig. 268, Taf. XX] stelle die Centralprojektion der zur Bildebene parallelen Rotationsachse und M_b die Centralprojektion der zur Bildebene parallelen Meridiankurve vor.

Betrachten wir nebstbei **Z** und M_b beziehungsweise als die in der Bildebene liegende Drehachse und die Meridiankurve einer zweiten Rotationsfläche, so ist ersichtlich, dass beide Flächen in bezug auf das Projektionscentrum ähnlich liegen. Hieraus folgt sofort, dass die besagten Flächen von dem nämlichen Kegel aus dem Projektionscentrum berührt werden, also dieselbe Kontur besitzen. Hiermit erscheint die gestellte Aufgabe auf die vorhergehende zurückgeführt.

§ 370.

132. Aufgabe: **An eine Rotationsfläche, deren Achse Z** [Fig. 269, Taf. XX] **in der Bildebene liegt, ist parallel zu einer gegebenen Ebene T_v eine Tangentialebene zu legen und ihr Berührungspunkt zu bestimmen.**

Nachdem die zur centralprojizierenden Ebene T_v parallele Tangentialebene die Gerade T_v zur Fluchtrace hat, so wird es sich bloss um die Konstruktion der zugehörigen Bildflächtrace T_b handeln.

Wie wir bereits wissen (Satz 1, § 364), liegt der Berührungspunkt der zu bestimmenden Tangentialebene in der zu ihr, also auch zur Ebene T_v senkrechten Meridianebene. Die Bildflächtrace H_b der letzteren fällt mit der in der Bildebene liegenden Drehachse zusammen, während die Fluchttrace die durch den Normalenfluchtpunkt v_s von T_v parallel zu H_b geführte Gerade H_v ist.

Die Schnittgerade dieser Meridianebene $H_v H_b$ mit der zu konstruierenden Tangentialebene $T_v T_b$ muss notwendig eine Tangente der in $H_v H_b$ liegenden Meridiankurve sein; ihr Fluchtpunkt kann daher nur der Schnitt **V** von H_v und T_v sein.

Denkt man sich nun die genannte Meridiankurve um H_b in die Bildebene gedreht, so wird dieselbe nach vollzogener Umlegung offenbar mit der in der Bildebene selbst gegebenen Meridiankurve

M_b zusammenfallen, und die um H_b umgelegte Schnittgerade von $T_v T_b$ und $H_v H_b$ wird als die zum Fluchtstrahle $C_0 V$ parallele Tangente t_0 von M_b dargestellt erscheinen.

Bestimmt man nun die Centralprojektion $t = Vd$ von t_0, so ist die durch den Durchstosspunkt d parallel zu T_v gezogene Gerade T_b die gesuchte Bildflächtrace der Tangentialebene; ferner wird die Centralprojektion p des Berührungspunktes der letzteren mit der Rotationsfläche mittels des Strahles $C_0 p_0$ auf dV erhalten, wenn p_0 den Berührungspunkt von M_b und t_0 repräsentiert.

§ 371.

133. Aufgabe: **Die Kontur einer Rotationsfläche, deren Achse in der Bildebene liegt, soll mit Hilfe der längs der Meridiankurven berührenden Cylinder konstruiert werden.**

Seien Z beziehungsweise M_b [Fig. 270, Taf. XX] die in der Bildebene liegende Rotationsachse und Meridiankurve der Fläche; ferner stelle (A, C) das Projektionscentrum vor.

Infolge der gemachten Voraussetzung fallen die Bildflächtracen aller Meridianebenen mit Z zusammen; wir können daher als Fluchttrace einer derartigen Ebene $H'_v H'_b$ eine beliebige zu Z parallele Gerade H'_v wählen.

Der Cylinder, dessen Leitkurve die in der Ebene $H'_v H'_b$ liegende Meridiankurve ist, und dessen Erzeugenden senkrecht zu $H'_v H'_b$ sind, wird (Satz 2, § 364) die Rotationsfläche längs dieser Meridiankurve berühren, während die durch das Projektionscentrum gehenden Tangentialebenen des Cylinders auch mit der Rotationsfläche eine Berührung eingehen, woraus hervorgeht, dass ihre Bildflächtracen zwei Tangenten der gesuchten Konturkurve vorstellen werden.

Um diese Tangentialebenen zu finden, führen wir durch das Projektionscentrum eine Senkrechte zur Meridianebene $H'_v H'_b$ und bestimmen den Schnittpunkt α' beider. Letzteres kann sehr einfach mit Hilfe der durch das Projektionscentrum senkrecht zu Z geführten Ebene $P_v P_b$ und ihrer Umlegung geschehen.

Führt man weiter von dem Punkte α' an die Meridankurve in $H'_v H'_b$ die Tangenten, so gehören dieselben, wie bekannt, den gesuchten Tangentialebenen an.

Um die genannten Tangenten konstruieren zu können, legen

wir sowohl die Meridiankurve als auch den Punkt α' um H_b^1 in die Bildebene um, wobei die erstere mit dem in der Bildebene gegebenen Meridan M_b zusammenfällt, während α' nach α_0' gelangt. Zieht man nun von α_0' an M_b die Tangente t_0' und führt dieselbe, sowie *ihren Berührungspunkt* p_0' nach t' resp. p' zurück, wobei man von dem um H_v^1 umgelegten Projektionscentrum C_0^1 Gebrauch macht, so erhält man in t' eine Gerade dargestellt, durch welche, den früheren Erörterungen gemäss, die centralprojizierende Tangentialebene der Rotationsfläche im Punkte p' geht. Hieraus folgt aber, dass die Centralprojektion t' selbst bereits die Bildflächtrace (und Fluchttrace) dieser Ebene repräsentiert, d. h. eine Tangente der Konturkurve und zwar jene im Punkte p' vorstellt.

Indem man in gleicher Weise andere Meridianebenen benützt, können beliebig viele Punkte und Tangenten der Konturkurve ermittelt werden.

Hier sei noch eine Hilfskonstruktion angeführt, welche es ermöglicht, das erläuterte Verfahren auch dann beizubehalten, wenn die Fluchttrace H_v^2 einer solchen Meridianebene ausserhalb der Grenze der Zeichnungsfläche zu liegen kommt.

Die unzugängliche Fluchttrace H_v^2 gehe beispielsweise durch jenen Punkt A_1^2, welcher sich im Schnitte von P_b mit dem beliebig durch C gezogenen Strahle CA_1^2 (um P_b umgelegte Falllinie von H_v^2) ergibt. Die durch den Schnittpunkt z von $Z = H_b^2$ und P_b parallel zu CA_1^2 gezogene Gerade (H^2) repräsentiert die um P_b umgelegte Falllinie der Meridianebene $H_v^2 H_b^2$.

Führt man wieder, wie vorher, durch C die Senkrechte zu (H^2), so wird dieselbe (H^2) und P_b beziehungsweise in α_2 und α_2' treffen, wobei α_2' die Centralprojektion jenes Punktes repräsentiert, in welchem die durch das Projektionscentrum senkrecht zur Ebene $H_v^2 H_b^2$ gezogene Gerade die letztere schneidet. Die Umlegung α_0^2 dieses Punktes um H_b^2 wird erhalten, wenn man $z\alpha_2 = z\alpha_0^2$ auf P_b aufträgt. Ziehen wir nun von α_0^2 an M_b die Tangente t_0^2, so haben wir bloss diese und den Berührungspunkt p_0^2 derselben zurückzuführen. Hierzu benötigt man selbstverständlich das um H_v^2 umgelegte Projektionscentrum C_0^2, welches sich, trotzdem H_v^2 unzugänglich ist, leicht ergeben wird, da man zu besagtem Zwecke, wie unschwer einsusehen, bloss CC_0^2 parallel zu $\alpha_2 \alpha_2^0$ zu ziehen hat. Im übrigen gilt die früher erläuterte Konstruktion.

§ 372.

134. Aufgabe: **Es ist die Kontur einer Rotationsfläche, deren Achse beliebig gegen die Bildebene geneigt ist, zu konstruieren.**

Die Drehachse **Z** ist durch die Gerade **dv** [Fig. 271, Taf. XX] dargestellt. Die durch **dv** zur Bildebene senkrecht gelegte Ebene sei $P_v P_b$, und die zu dieser letzteren Ebene senkrecht geführte Meridianebene sei $E_v E_b$. Die Rotationsfläche sei durch die Centralprojektion **M** der in $E_v E_b$ liegenden Meridiankurve gegeben.

Um die Konturkurve der Rotationsfläche zu konstruieren, machen wir wieder von der Eigenschaft Gebrauch, dass jede Tangentialebene eines längs des betreffenden Parallelkreises der Rotationsfläche umschriebenen Kegels auch die Rotationsfläche in einem Punkte des genannten Parallelkreises berührt.

Bestimmen wir vor allem die dem Fluchtpunkt **v** der Achse entsprechende Normalenfluchttrace e_v, d. i. die gemeinschaftliche Fluchttrace aller Parallelkreisebenen. Selbstverständlich kann jede beliebige, parallel zu e_v gezogene Gerade e_b^1 als die Bildflächtrace einer Parallelkreisebene angesehen werden. Den Mittelpunkt des betreffenden Parallelkreises K_1 erhalten wir als Schnittpunkt o_1 von **dv** mit $e_v e_b^1$ durch Zuhilfenahme der Ebene $P_v P_b$.

Die Ebene $e_v e_b^1$ wird ferner die Meridianebene $E_v E_b$ in einer durch o_1 gehenden Geraden σ schneiden, welche offenbar zu e_b^1 parallel sein wird, da der Anordnung gemäss die Tracen beider Ebenen $e_v e_b^1$ und $E_v E_b$ parallel sind. Weiter trifft die Gerade σ die Meridiankurve **M** in einem Punkte a_1, und wir erhalten mithin in $o_1 a_1$ die Centralprojektion eines (zur Bildebene parallelen) Radius des in $e_v e_b^1$ liegenden Parallelkreises K_1 dargestellt.

Zieht man in a_1 die Tangente τ_1 an **M**, so schneidet dieselbe **dv** in einem Punkte s_1, der die Centralprojektion des Scheitels jenes Rotationskegels repräsentiert, welcher der Umdrehungsfläche längs des Parallelkreises K_1 umschrieben ist.

Ebenso wie an früherer Stelle (§ 368, Aufgabe 130) werden die von s_1 an die Centralprojektion von K_1 geführten Tangenten auch hier zwei Tangenten der Konturkurve liefern, und werden auch weiter ihre Berührungspunkte mit der Centralprojektion von K_1 die Berührungspunkte mit der Kontur selbst vorstellen.

Man hat demnach (wie in Aufgabe 130) s_1 vorübergehend als die Centralprojektion eines in $e_v e_b^{\prime}$ liegenden Punktes zu betrachten und denselben, sowie auch die Punkte o_1 und a_1 um $e_b^{\prime}$ nach s_1^0, o_1^0 und a_1^0 umzulegen. Der aus o_1^0 durch a_1^0 beschriebene Kreis $K_0^{\prime}$ ist demnach die Umlegung des Parallelkreises K_1. Führt man nun die von s_1^0 an $K_0^{\prime}$ gezogenen Tangenten $t_0^{\prime}$ und $t_0^{\prime\prime}$, sowie deren Berührungspunkte $p_0^{\prime}$ und $p_0^{\prime\prime}$ beziehungsweise nach $t^{\prime}$ und $t^{\prime\prime}$, $p^{\prime}$ und $p^{\prime\prime}$ zurück, so erhält man in $t^{\prime}$ und $t^{\prime\prime}$ zwei Geraden, welche die Konturkurve in $p^{\prime}$ resp. $p^{\prime\prime}$ berühren. Dadurch, dass man nun die gleiche Konstruktion für andere Parallelkreisebenen durchführt, können beliebig viele Punkte und Tangenten der zu bestimmenden Konturkurve ermittelt werden.

§ 373.

135. Aufgabe: **Es soll die Berührungskurve einer Rotationsfläche, deren Achse in der Bildebene liegt, mit dem ihr aus einem gegebenen Punkte umschriebenen Kegel bestimmt werden.**

Seien wieder Z und M_b [Fig. 272, Taf. XX] beziehungsweise die in der Bildebene liegende Achse und Meridiankurve der Rotationsfläche, während der Kegelscheitel P auf dem zur Bildebene senkrechten Träger Ad gegeben sei.

Auch in diesem Falle werden wir von der Eigenschaft Gebrauch machen, dass die Tangentialebenen eines der Rotationsfläche längs eines Parallelkreises umschriebenen Kegels auch diese Rotationsfläche in Punkten des genannten Parallelkreises berühren.

Im vorliegenden Falle ist die durch den Hauptpunkt A senkrecht zu Z gezogene Gerade e_v die gemeinschaftliche Fluchttrace aller Parallelkreisebenen. Wählen wir eine solche Ebene, indem wir als ihre Bildflächtrace eine beliebige zu e_v parallele Gerade $e_b^{\prime}$ annehmen, so erhalten wir im Schnitte o_1 von $e_b^{\prime}$ mit Z den Mittelpunkt des betreffenden Parallelkreises und, wenn a_1 den Schnitt von $e_b^{\prime}$ mit M_b bezeichnet, in $o_1 a_1$ den Radius desselben. Die in a_1 an M_b gezogene Tangente τ_1 trifft die Achse Z in dem Scheitel S_1 des der Rotationsfläche längs des Parallelkreises $K_1 = (o_1, a_1)$ umschriebenen Kegels.

Durch den Punkt P ist nun an diesen Kegel die Tangentialebene zu legen. Zu diesem Zwecke werden wir (§ 310) den Schnittpunkt Δ_1 der Verbindungsgeraden $s_1 P$ mit der Parallelkreisebene

$e_v e_b^1$ bestimmen und von Δ_1 an den Parallelkreis K_1 die Tangenten führen. Behufs Durchführung des Gesagten legen wir den Parallelkreis K_1 und den Punkt Δ_1 um e_b^1 nach K_1^0 resp. Δ_1^0 um, und führen die Berührungspunkte p_0^1 und p_0^2 der von Δ_1^0 an K_1^0 gezogenen Tangenten t_0^1 und t_0^2 beziehungsweise nach p_1 und p_2 zurück. Früheren Erläuterungen (§ 310) entsprechend, sind nun die Geraden $p_1 s_1$ und $p_2 s_1$ die Berührungserzeugenden des Kegels (s_1, K_1) mit zwei durch P gehenden Ebenen, woraus weiter folgt, dass die besagten Ebenen auch die Rotationsfläche in p_1 und p_2 berühren, dass also p_1 und p_2 zwei Punkte der zu bestimmenden Berührungskurve repräsentieren.

Durch Wiederholung derselben Konstruktion für andere Parallelkreise ergeben sich beliebig viele Punkte der Berührungskurve.

§ 374.

136. Aufgabe: **Die Berührungskurve einer Rotationsfläche, deren Achse zur Bildebene senkrecht steht, ist mit dem derselben parallel zu einer gegebenen Geraden umschriebenen Cylinder zu ermitteln.**

Es seien A [Fig. 273, Taf. XX] der Hauptpunkt, D der Bildflächdurchstosspunkt der Drehachse, also $AD = Z$ die Centralprojektion der letzteren, ferner sei $M_v M_b$ irgend eine Meridianebene und M die Centralprojektion der in dieser Ebene liegenden Meridiankurve. V stelle den gemeinschaftlichen Fluchtpunkt der Erzeugenden des der Fläche umschriebenen Cylinders vor.

Die Methode, Punkte der Berührungskurve zu erhalten, ist dieselbe, welche wir bereits in dem vorhergehenden Probleme zur Geltung brachten, doch vereinfacht sich die Konstruktion wesentlich dadurch, dass sämtliche Parallelkreise, als parallel zur Bildebene, centralprojektivisch wieder als Kreise dargestellt erscheinen.

Ziehen wir demnach an beliebiger Stelle eine zu M_b parallele Gerade, welche Z und M beziehungsweise in o_1 und a_1 trifft, so repräsentiert die Strecke $o_1 a_1$ die Centralprojektion eines Parallelkreisradius. Die Centralprojektion des betreffenden Parallelkreises ist sodann durch jenen Kreis K_1 dargestellt, welcher aus o_1 durch a_1 gehend beschrieben wird.

Die Tangente τ_1 an die gegebene Meridiankurve M in a_1 trifft die Achse Z in dem Scheitel s_1 des die Rotationsfläche längs K_1

berührenden Kegels. An diesen Kegel sind parallel zu den in V verschwindenden Geraden, also durch die Gerade s_1V Tangentialebenen zu legen.

Zu diesem Zwecke ermitteln wir den Schnittpunkt Δ_1 von s_1V mit der (zur Bildebene parallelen) Ebene des Parallelkreises K_1, indem wir einfach $o_1\Delta_1$ parallel zu AV ziehen. Die von Δ_1 aus an K_1 geführten Tangenten $t_1 = \Delta_1 p_1$ und $t_2 = \Delta_1 p_2$ gehören zwei zu V parallelen Tangentialebenen des umschriebenen Kegels, also auch der Rotationsfläche selbst an. Die Berührungserzeugenden derselben mit dem Kegel sind die Geraden s_1p_1 und s_1p_2 und ihre Berührungspunkte mit der Rotationsfläche sind unmittelbar die Punkte p_1 und p_2, welche als solche bereits der gesuchten Berührungskurve angehören.

§ 375.

137. Aufgabe: Es ist der ebene Schnitt einer Rotationsfläche, deren Achse zur Bildebene senkrecht steht, zu bestimmen.

Sei, wie vorher, $Z = AD$ [Fig. 273, Taf. XX] die Drehachse, M_vM_b irgend eine Meridianebene, M die Projektion der in dieser Ebene liegenden Meridiankurve und E_vE_b die schneidende Ebene.

Die Schnittkurve der Rotationsfläche mit der Ebene E wird man am einfachsten als den geometrischen Ort der Schnittpunkte von E_vE_b mit den Parallelkreisen der Fläche erhalten. Besagte Schnittpunkte können folgendermassen bestimmt werden.

Man zieht irgend eine zu M_b parallele Gerade, welche M diesfalls in a_1 trifft, und erhält sofort in o_1a_1 einen Radius eines Parallelkreises K_1, so dass das Bild K_1 unmittelbar verzeichnet werden kann. Nachdem die Gerade o_1a_1 der Meridianebene M_vM_b angehört, so trifft sie die Schnittgerade $\delta\varphi$ der letzteren und der Ebene E_vE_b in einem Punkte ω_1. Die Gerade l_1, welche durch ω_1 parallel zu E_b gezogen wird, repräsentiert offenbar den Schnitt von E_vE_b mit der zur Bildebene parallelen Ebene des Parallelkreises K_1, trifft mithin den letzteren in zwei der gesuchten Schnittkurve direkt angehörenden Punkten b_1 und b_2.

In gleicher Weise können weitere Punkte der Schnittkurve mit Hilfe anderer Parallelkreise konstruiert werden.

§ 376.

138. Aufgabe: **Der ebene Schnitt einer Rotationsfläche, deren Achse in der Bildebene liegt, ist zu bestimmen.**

Es mögen Z und M_b [Fig. 274, Taf. XXI] beziehungsweise die in der Bildebene liegende Drehachse und Meridiankurve und $E_v E_b$ die schneidende Ebene repräsentieren.

Die Gerade e_v (durch den Hauptpunkt A senkrecht zu Z gezogen) stelle die Fluchttrace der Parallelkreisebenen vor. Eine beliebige zu ihr parallele Gerade $e_b^{\prime}$ repräsentiert die Bildflächtrace einer solchen Ebene. Die letztgenannte Trace $e_b^{\prime}$ schneidet Z in dem Mittelpunkte o_1 des entsprechenden Parallelkreises K_1 und die Kurve M_b in einem Punkte a_1, durch welchen der besagte Kreis K_1 geht.

Der Parallelkreis K_1 wird von der Schnittgeraden vd_1 der Ebenen $E_v E_b$ und $e_v e_b^{\prime}$ in zwei Punkten der gesuchten Schnittkurve getroffen. Wie bekannt, werden diese Punkte einfach dadurch erhalten, dass man K_1 und $s_1 = vd_1$ um $e_b^{\prime}$ beziehungsweise nach K_1^o und s_1^o umlegt und deren Schnittpunkte $p_0^{\prime}$ und $p_0^{\prime\prime}$ nach $p^{\prime}$ und $p^{\prime\prime}$ zurückführt.

Mit Hilfe beliebiger anderer Parallelkreisebenen kann man nach derselben Methode weitere Punkte der Schnittkurve bestimmen.

XI. Abschnitt.

Konstruktionen von und an Flächen zweiten Grades.

XXI. Kapitel.

Die Kugel.

§ 377.

Die Konstruktionen, welche die Flächen zweiten Grades betreffen, stützen sich im wesentlichen auf die in Kap. XIV abgeleiteten Eigenschaften. Im folgenden wollen wir an einer Reihe von Problemen zeigen, wie diese Eigenschaften bei centralprojektivischer Darstellung zweckentsprechend verwertet werden können. Zunächst mögen einige Aufgaben die Kugelfläche — als die einfachste Fläche zweiten Grades — betreffend, erledigt werden.

139. Aufgabe: **In centralprojektivischer Darstellung ist die Kontur einer Kugel zu konstruieren.**

Nachdem der einer Kugel aus einem beliebigen Punkte — also speziell aus dem Projektionscentrum — als Scheitel umschriebene Kegel stets vom zweiten Grade ist, so wird auch dessen Schnitt mit der Bildebene, d. i. die Konturkurve der Kugel, eine Kurve zweiten Grades sein.

Man hätte demgemäss nichts weiter zu thun, als beispielsweise die Bildflächdurchstosspunkte von fünf durch das Projektionscentrum gehenden Kugeltangenten, oder die Bildflächtracen von fünf durch das Centrum gehenden Kugelberührebenen zu bestimmen, um die Konturkurve durch fünf Punkte resp. fünf Tangenten vollkommen gegeben zu erhalten.

Es gibt jedoch noch einen besonderen Weg resp. ein besonderes Verfahren, auf Grund dessen man unmittelbar die Brenn-

punkte und die Brennpunktsachse der verlangten Konturkurve konstruieren kann. Zu diesem Behufe wollen wir folgende Betrachtung anstellen.

Es repräsentiere **S** [Fig. 275, Taf. XXI] den Scheitel eines Rotationskegels, K_1 und K_2 seien zwei Kugeln, welche von diesem Kegel längs der Kreise γ_1 und γ_2 berührt werden, und **e** sei eine Ebene, welche die beiden Kugeln K_1 und K_2 beziehungsweise in f_1 und f_2 berühren möge. Diese Ebene **e** wird den Kegel in einer Kurve **C** zweiten Grades schneiden, deren Brennpunkte, wie sich leicht zeigen lässt, die Punkte f_1 und f_2 sind.

Eine beliebige Kegelerzeugende **g**, welche notwendig auch eine gemeinschaftliche Tangente der beiden Kugeln K_1 und K_2 ist, berührt die letzteren in den Punkten α_1 und α_2, in welchen sie die Kreise γ_1 und γ_2 trifft. Ferner ist der Schnittpunkt **P** von **g** und **e** ein Punkt der Schnittkurve **C**.

Denken wir uns weiter in der Ebene **e** die beiden Verbindungsgeraden Pf_1 und Pf_2 gezogen, so werden dieselben zwei Tangenten der Kugeln K_1 und K_2 in den bezüglichen Punkten f_1 und f_2 vorstellen.

Berücksichtigen wir nun, dass alle von einem Punkte ausserhalb an eine Kugel gezogenen Tangenten zwischen diesem Punkte und den betreffenden Berührungspunkten gleich lang sind, so ergibt sich (in wahrer Grösse gedacht) dass:

$$Pf_1 = P\alpha_1 \quad \text{und} \quad Pf_2 = P\alpha_2$$

sei, und dass ferner auch:

$$Pf_1 + Pf_2 = P\alpha_1 + P\alpha_2 = \alpha_1\alpha_2 \quad \text{ist.}$$

Das Stück $\alpha_1\alpha_2$ ändert aber seine Grösse nicht, welches auch die Lage der Erzeugenden **g**, und welches auch die Lage des Punktes **P** in der Kurve **C** sein mag; es ist somit

$$Pf_1 + Pf_2 = \text{konstant}$$

für alle Punkte von **C**, oder mit anderen Worten f_1 und f_2 sind die Brennpunkte der Schnittkurve **C**. Man hat demnach den von Dandelin herrührenden Satz:

„Die Brennpunkte der Kurve zweiten Grades, in welcher ein Rotationskegel von einer beliebigen Ebene geschnitten wird, sind die Berührungspunkte dieser Ebene mit jenen zwei Kugeln, welche gleichzeitig dem Kegel eingeschrieben sind."

Diesem Satze kann jedoch noch eine andere Form gegeben werden, welche ihn dem Zwecke centralprojektivischer Darstellung geeigneter macht.

Denken wir uns nämlich die Berührungsradien $f_1 o_1$ und $f_2 o_2$ der beiden Kugeln K_1 und K_2 gezogen, so werden dieselben senkrecht zu e, also untereinander parallel sein, und man wird aus der ähnlichen Lage der beiden Kugeln gegen den Kegelscheitel S finden, dass der Punkt f'_2, in welchem $f_1 o_1$ die Kugel K_1 zum zweitenmal schneidet, auf dem Verbindungsstrahle Sf_2 liege.

Nehmen wir ferner irgend eine zu e parallele Ebene E an, so werden die Schnitte von e und E mit dem Kegel zwei ähnlich gelegene Kurven zweiten Grades (§ 196) sein. Es werden daher auch die beiden Brennpunktpaare f_1 und f_2; F_1 und F_2 ähnlich liegen, oder F_1 und F_2 sind die Schnitte der Ebene E mit den Strahlen, welche von dem Kegelscheitel S nach den Endpunkten f_1 und f'_2 des zu E senkrechten Durchmessers der Kugel K_1 gezogen werden. Hiernach besteht der Satz:

„Die Brennpunkte eines ebenen Schnittes eines Rotationskegels werden gefunden, indem man die Endpunkte des zur schneidenden Ebene senkrechten Durchmessers irgend einer dem Kegel eingeschriebenen Kugel vom Kegelscheitel aus auf die schneidende Ebene projiziert.“

Auf Grund dieses Satzes ist es leicht, die eingangs gestellte Aufgabe konstruktiv durchzuführen.

Sei o [Fig. 276, Taf. XXI] der auf dem zur Bildebene senkrechten Träger $Z = Ad$ gegebene Kugelmittelpunkt und r der Kugelradius.

Die centralprojizierende Ebene $P_v P_b$, deren Tracen mit dem Bilde Z des zur Bildebene senkrechten Kugeldurchmessers Ad zusammenfallen, ist gleichzeitig eine Diametralebene der Kugel, schneidet mithin die letztere in einem Kreise K, dem ebenfalls der Mittelpunkt o und der Radius r zukommt.

Legen wir um P_b das Projektionscentrum, den Durchmesser Z mit dem Mittelpunkt o und den Kreis K in die Bildebene nach C_0, Z_0, o_0 und K_0 um, projizieren wir ferner die Endpunkte f_1^0 und f_2^0 des Kreisdurchmessers Z_0 von C_0 aus auf P_b beziehungsweise nach F_1 und F_2, so stellen die beiden letztgenannten Punkte die Centralprojektionen der Endpunkte des zur Bildebene senkrechten Kugeldurchmessers Z, also, dem letztbewiesenen Satze gemäss, die Brennpunkte der Kugelkontur vor.

Zieht man weiter in der Umlegung die beiden von C_0 ausgehenden Tangenten τ'_0 und τ''_0 an K_0, welche P_b beziehungsweise in a und b treffen, so repräsentieren die Punkte a und b, als

Bildflächdurchstosspunkte zweier Tangenten des Kugelkreises K (also auch Tangenten der Kugel selbst), zwei Punkte der Konturkurve. Nachdem dieselben aber nebstbei mit den Brennpunkten F_1 und F_2 in derselben Geraden liegen, so stellen sie insbesondere die Endpunkte der Brennpunktsachse dar.

§ 378.

140. Aufgabe: **Es sind die Schnittpunkte einer Geraden dv [Fig. 277, Taf. XXI] mit einer Kugel, deren Mittelpunkt o auf dem Träger δφ gegeben und deren Radius gleich r ist, zu konstruieren.**

Führen wir zunächst durch dv und o auf bereits bekannte Weise die Hilfsebene $D_v D_b$. Dieselbe ist offenbar eine Diametralebene der Kugel, schneidet die letztere also in einem Kreise K, dem der Mittelpunkt o und der Radius r entspricht.

Legt man sodann die gegebene Gerade $l = dv$ und den eben genannten Kreis K um D_b in die Bildebene nach l_0 resp. K_0 um, so ergeben sich im Schnitte a_0 und b_0 von K_0 und l_0 die Umlegungen der gesuchten Schnittpunkte, woraus ohne weiteres die Bilder a und b derselben abgeleitet werden können.

§ 379.

141. Aufgabe: **An eine Kugel, welche durch ihren Mittelpunkt o auf dem Träger δφ** [Fig. 278, Taf. XXI] **und durch den Radius r gegeben ist, sollen parallel zu einer gegebenen Ebene T_v die Berührebenen gelegt werden.**

Bestimmen wir mittels des der Fluchttrace T_v entsprechenden Normalenfluchtpunktes v_s den zur Ebene T_v senkrechten Kugeldurchmesser $v_s o \delta'$, so wird derselbe auch zu den verlangten Tangentialebenen senkrecht stehen; seine Endpunkte werden daher die Berührungspunkte der letzteren vorstellen.

Um die Bilder a und b dieser Berührungspunkte zu erhalten, haben wir (etwa mittels des Teilpunktes T von $v_s o$ in der Hilfsebene $h_v h_b$) den Radius r von o aus auf $v_s o$ nach oa beziehungsweise ob aufzutragen.

Bestimmt man schliesslich die Bildflächtrace T_b^a jener Ebene, welche durch a geht und deren Fluchttrace T_v ist, so wird durch

$T_v T_b^a$ die eine der gestellten Aufgabe entsprechende Berührebene bestimmt, während man die zweite Tangierungsebene $T_v T_b^b$ in gleicher Weise unter Benützung des Punktes b erhalten würde.

§ 380.

142. Aufgabe: **An eine Kugel, deren Mittelpunkt o auf dem Träger $\delta\varphi$ [Fig. 279, Taf. XXI] gegeben und deren Radius r ist, sind durch eine Gerade DV Berührebenen zu legen und die Berührungspunkte zu ermitteln.**

Führt man, mit Hilfe der dem Fluchtpunkte V entsprechenden Normalenfluchttrace D_v die zur Geraden DV senkrechte Diametralebene $D_v D_b$ der Kugel, so wird, da dieselbe mit der Geraden $l = DV$ konjugiert ist (§ 303), der Kreis K, in welchem sie die Kugel schneidet, gleichzeitig die Berührungskurve der letzteren mit dem parallel zu DV umschriebenen Cylinder (Satz 3, § 292) repräsentieren und werden weiter die durch DV gehenden Tangentialebenen des besagten Cylinders gleichzeitig auch die verlangten Kugeltangentialebenen darstellen.

Bestimmen wir mithin den Schnittpunkt s von DV und $D_v D_b$, und legen s sowie auch den Diametralkreis K um D_b in die Bildebene nach s_0 resp. K_0 um, so haben wir bloss von s_0 aus eine Tangente t'_0 an K_0 zu führen, und dieselbe sodann samt dem Berührungspunkt p'_0 beziehungsweise nach $t' = d_1 v_1$ und p' zurückzuführen.

Die durch DV und $d_1 v_1$ bestimmte Ebene $T'_v T'_b$ berührt dann den vorgenannten Cylinder längs der Erzeugenden Vp' und die Kugel im Punkte p'. Die zweite der Aufgabe entsprechende Tangentialebene erhält man bei Benützung der zweiten von s_0 aus an K_0 geführten Tangente.

§ 381.

143. Aufgabe: **Gegeben ist ein Rotationskegel, dessen Achse zur Bildebene senkrecht steht, und innerhalb desselben ein Punkt; durch diesen Punkt soll eine Ebene von solcher Lage geführt werden, dass besagter Punkt der Brennpunkt ihres Schnittes mit dem Kegel wird.**

Die Achse des Rotationskegels sei $Z = Ad$ [Fig. 280, Taf. XXI], ferner sei der aus dem Durchstosspunkte d derselben als Mittel-

punkt beschriebene Kreis **K** der Schnitt des Rotationskegels mit der Bildebene und weiter sei **F** der auf dem Träger $\delta\varphi$ gegebene Punkt.

Die Lösung des gestellten Problems beruht auf der Anwendung des in § 377 angeführten ersten Satzes. Wird nämlich eine Kugel bestimmt, welche dem Kegel eingeschrieben ist und nebstbei durch den Punkt **F** geht, so stellt, dem vorerwähnten Satze gemäss, die Tangentialebene dieser Kugel im Punkte **F** bereits die verlangte Ebene vor.

Um die besagte Konstruktion durchzuführen, legen wir zunächst durch **F** und durch die Achse $Z = Ad$ die Hilfsebene $P_v P_b$. Diese Ebene schneidet den Kegel in den beiden symmetrisch zur Achse **Z** liegenden Erzeugenden Sd_1 und Sd_2.

Die zu bestimmende Kugel hat ihren Mittelpunkt auf der Achse **Z**, geht durch **F** und wird von allen Erzeugenden, also auch von Sd_1 und Sd_2, berührt. Bezeichnete Kugel wird mithin von der Hilfsebene $P_v P_b$ in einem Kreise K_1 geschnitten werden, der seinen Mittelpunkt ebenfalls auf **Z** hat, durch **F** geht und die beiden Geraden Sd_1 und Sd_2 berührt.

Die Kugel selbst wird bestimmt sein, sobald der besagte Kreis K_1 bekannt ist. Um den letzteren zu konstruieren, legen wir die beiden Geraden Sd_1 und Sd_2 sowie den Punkt **F** um P_b beziehungsweise nach $S_0 d_1$, $S_0 d_2$ und F_0 um. Zeichnet man nun einen Kreis, welcher $S_0 d_1$ und $S_0 d_2$ in irgend welchen Punkten berührt, so wird derselbe mit dem zu bestimmenden Kreise K_1^0 (in bezug auf S_0 als Ähnlichkeitscentrum) ähnlich liegen. Dem Punkte F_0 entspricht ähnlich einer der beiden Schnittpunkte von **k** und $S_0 F_0$, beispielsweise der Punkt $\mathfrak{F}$. Man erhält nun, wie sofort ersichtlich, mit Hilfe der ähnlich gelegenen, d. i. parallelen Geraden $\mathfrak{F}\omega$ und $F_0 o_0$ den Mittelpunkt o_0 von K_1^0.

Bestimmen wir weiter die Tangente t_0 von K_1^0 in F_0 und deren Centralprojektion $F = DV$, so wird die zu bestimmende Ebene als Tangentialebene der früher genannten Hilfskugel durch **DV** gehen, und, nachdem sie zu dem durch **F** gehenden Kugelradius senkrecht ist, dieser aber in der Ebene $P_v P_b$ liegt, wird sie auch zu dieser Ebene normal sein müssen. Weil aber $P_v P_b$ senkrecht zur Bildebene ist, so werden die Tracen E_v und E_b der gesuchten Ebene durch jene Geraden dargestellt erscheinen, welche durch **V** und **D** senkrecht zu P_b gezogen werden können.

Der zweite Schnittpunkt von **k** und $S_0 F_0$ liefert, als mit F_0 ähnlich gelegen aufgefasst, eine zweite der Aufgabe entsprechende Ebene.

XXII. Kapitel.

Rotationsflächen zweiten Grades.

§ 382.

144. Aufgabe: **Ein Rotationshyperboloid ist durch die in der Bildebene liegende Drehachse und durch eine Erzeugende gegeben; es sollen die Achsen eines ebenen Schnittes dieser Fläche bestimmt werden.**

In § 207 haben wir gezeigt, dass ein windschiefes Hyperboloid zwei gleiche Achsen haben kann, so dass es von allen zur dritten Achse senkrechten Ebenen in Kreisen geschnitten wird. Diesfalls kann die Fläche durch Umdrehung einer beliebigen auf ihr liegenden Linie, also auch durch Umdrehung einer geradlinigen Erzeugenden um die letztgenannte Achse (§ 362) hervorgebracht werden, woraus zu entnehmen ist, dass ein Rotationshyperboloid durch seine Drehachse und eine geradlinige Erzeugende (welche selbstverständlich diese Achse nicht schneiden darf) vollständig bestimmt sei.

Nehmen wir nun an, es sei Z [Fig. 281, Taf. XXI] die in der Bildebene liegende Rotationsachse, $dv = g$ die gerade Erzeugende des Hyperboloides, und es sollen die Achsen der Schnittkurve dieser Fläche mit der Ebene $E_v E_b$ bestimmt werden.

Behufs Lösung dieses Problems ist es vorteilhaft, das Umdrehungshyperboloid gleichzeitig als windschiefe Fläche (Fläche zweiten Grades) sowie als Rotationsfläche zu betrachten, und die diesen Flächengattungen wesentlich zukommenden Eigenschaften bei den durchzuführenden Konstruktionen zu benützen.

Nachdem das Umdrehungshyperboloid vom zweiten Grade ist, so ist auch der zu bestimmende ebene Schnitt eine Kurve zweiten Grades, und da die Fläche gleichzeitig als Rotationsfläche aufgefasst werden kann, so wird die eine Achse der Schnittkurve (Satz 2, § 363) die Schnittgerade $x = d_1 v_1$ der Ebene $E_v E_b$ mit der zu ihr senkrechten Meridianebene $P_v P_b$ sein; die Endpunkte dieser Achse sind die gemeinschaftlichen Punkte der Geraden $x = d_1 v_1$ und des Hyperboloides. Um die besagten Punkte zu finden, stellen wir folgende Betrachtung an.

Die Gerade $x = d_1 v_1$ schneidet die Drehachse Z in dem Punkte d_1. Die zu bestimmenden Schnittpunkte von x mit dem Hyperboloide wollen wir mit a und b bezeichnen.

Denken wir uns die Gerade x um Z gedreht, so wird dieselbe einen Rotationskegel mit dem Scheitel d_1 erzeugen, während die beiden Punkte a und b hierbei zwei Kreise beschreiben werden, welche diesem Kegel sowohl, als auch dem Hyperboloid angehören, und mithin notwendig die Hyperboloiderzeugende $dv = g$ in zwei Punkten α' und β' treffen müssen, welche man ihrerseits wieder als die Schnittpunkte von $dv = g$ mit dem vorgenannten Rotationskegel auffassen kann. Auf diese gegenseitige Abhängigkeit gründet sich nun nachstehende Konstruktion.

Wir wählen eine beliebige zur Achse Z senkrechte Ebene, am einfachsten die centralprojizierende Ebene e_v, als Basisebene des Hilfskegels. Die Basis des letzteren ist sodann jener Kreis, welcher den Schnitt ω von Z und e_v zum Mittelpunkte hat und durch den Schnittpunkt n von e_v und $x = d_1 v_1$ geht. Nach der Umlegung um e_v erscheint der besagte Kreis in K_0 dargestellt.

Die durch den Kegelscheitel d_1 und die Gerade $dv = g$ gelegte Hilfsebene $h_v h_b$ schneidet die Ebene e_v in der Geraden $\varphi\delta = s$, welche um e_v umgelegt, in s_0 dargestellt erscheint. Die gemeinschaftlichen Punkte α_0 und β_0 von K_0 und s_0 liefern, in die Projektion nach α resp. β zurückgeführt und mit d_1 verbunden, die beiden Kegelerzeugenden $d_1\alpha$ und $d_1\beta$, welche gleichzeitig der Ebene $h_v h_b$ angehören. Die Schnittpunkte α' und β' derselben mit $dv = g$ sind nun auch die Schnittpunkte von g mit dem Rotationskegel.

Legt man weiter durch α' und β' die beiden zur Achse Z senkrechten Ebenen $e_v e_b^\alpha$ und $e_v e_b^\beta$, so repräsentieren dieselben, der vorhergehenden Betrachtung entsprechend, die Ebenen der dem Rotationshyperboloide und dem Rotationskegel gemeinschaftlichen Kreise; ihre Schnittpunkte mit der Geraden $x = d_1 v_1$ sind daher die gesuchten Achsenendpunkte a und b.

Um die zweite Achse der Schnittkurve zu ermitteln, zeichnen wir jene Ebene $e_v e_b^\Delta$, welche den Abstand der beiden Ebenen $e_v e_b^\alpha$ und $e_v e_b^\beta$ halbiert, also auch durch den Mittelpunkt O von ab (Mittelpunkt der Schnittkurve) geht. Diese Ebene $e_v e_b^\Delta$ schneidet die Ebene $E_v E_b$ in einer durch O gehenden und gleichzeitig auf $x = d_1 v_1$ senkrecht stehenden Geraden $y = d_2 v_2$, d. i. in der zu bestimmenden zweiten Achse der Schnittkurve.

Die Endpunkte dieser Achse sind die der letzteren und dem Hyperboloide gemeinschaftlichen Punkte. Dieselben werden, da die durch y gehende Ebene $\mathsf{e_v e_b^\Delta}$ zur Achse Z senkrecht steht, als die Schnittpunkte von y und dem in dieser Ebene liegenden Parallelkreise K_μ des Hyperboloides erhalten. Der Kreis K_μ hat den Schnittpunkt Δ von Z und $\mathsf{e_b^\Delta}$ zum Mittelpunkte und geht überdies durch den Schnittpunkt μ von $\mathsf{g} = \mathsf{dv}$ und $\mathsf{e_v e_b^\Delta}$. Nach der Umlegung um $\mathsf{e_b^\Delta}$ erscheinen K_μ und y beziehungsweise in K_μ^0 und y_0. Wie ersichtlich sind im vorliegenden Falle die beiderseitigen Schnittpunkte imaginär.

Hieraus folgt, dass die Schnittkurve eine Hyperbel ist, welche ab zur reellen Achse und y zur imaginären Achse hat.

Es wird sich nun darum handeln, die Asymptoten dieser Kurve zu ermitteln, also jene Geraden aufzusuchen, welche durch den Kurvenmittelpunkt O und durch die unendlich fernen Punkte der Schnittkurve gehen.

Zu diesem Behufe führen wir die Gerade $\mathsf{d_1 v}$ parallel zur gegebenen Hyperboloiderzeugenden g. Bei der Umdrehung um Z erzeugt die Gerade $\mathsf{d_1 v}$ einen Rotationskegel, dessen Erzeugenden zu den Hyperboloiderzeugenden offenbar parallel sind. Bestimmen wir auf bekannte Weise die gemeinschaftlichen Erzeugenden $\mathsf{d_1 V_1}$ und $\mathsf{d_1 V_2}$ dieses Kegels und der Ebene $\mathsf{E_v E_b}$, so werden zwei Erzeugenden des Hyperboloides existieren, welche zu $\mathsf{d_1 V_1}$ und $\mathsf{d_1 V_2}$, also auch zur Ebene $\mathsf{E_v E_b}$ parallel sind, und mithin die unendlich fernen Punkte der Schnittkurve liefern. Centralprojektivisch sind diese Punkte in $\mathsf{V_1}$ und $\mathsf{V_2}$ dargestellt, so dass man schliesslich in $\Sigma_1 = \mathsf{OV_1}$ und $\Sigma_2 = \mathsf{OV_2}$ die gesuchten Asymptoten erhält.

§ 383.

145. Aufgabe: **Es sind die Schnittpunkte eines Rotationsellipsoides mit einer beliebigen Geraden zu konstruieren.**

Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe würde darin bestehen, dass man durch die gegebene Gerade irgend eine (geeignete) Ebene legt, die Schnittkurve zweiten Grades der letzteren mit der Fläche bestimmt, und hierauf die der Geraden und dieser Schnittkurve gemeinschaftlichen Punkte konstruiert.

Man kann jedoch diesfalls auch nach einer besonderen Methode, die sich übrigens auch für andere das Rotationsellipsoid betreffende Aufgaben als vorteilhaft erweist, vorgehen, indem man das Ellipsoid durch affine Transformation in eine Kugel überführt.

Denken wir uns nämlich eine Ellipse **M** [Fig. 282, Taf. XXI] mit den Achsen **AB** und **CD**, und einen Kreis M_1 von dem Durchmesser **CD** um **AB** gedreht, so wird die erstere ein Rotationsellipsoid, der letztere dagegen eine Kugel erzeugen. Beide Flächen berühren sich längs des Kreises **K**, welchen die Punkte **C** und **D** bei der Umdrehung erzeugen.

Die beiden Meridiankurven **M** und M_1 sind affin in bezug auf die Richtung der Achse **AB** als „Affinitätsstrahlenrichtung“, und wird das Gleiche von allen Paaren von Meridiankurven der beiden Flächen gelten. Das diesbezügliche Affinitätsverhältnis ist

$$P\pi : P_1\pi = AO : A_1O = AO : CO$$

also gleich dem Achsenverhältnisse der Ellipse **M**.

Wählt man nun die Richtung **Z** der Achse **AB** als Richtung der Affinitätsstrahlen im Raume, die Ebene des gemeinschaftlichen Parallelkreises $CD = K$ als Affinitätsebene und das Verhältnis $AO : CO$ als die Charakteristik einer räumlichen Affinität, so werden sich (Satz in § 217 und nach § 218) die Kugel und das Ellipsoid affin entsprechen. Auf Grund dieser Affinität gelangt man zu der nachstehenden Lösung des gestellten Problems.

Sei **dv** [Fig. 283, Taf. XXII] die Rotationsachse des Ellipsoides, **O** auf **dv** der Mittelpunkt des letzteren, während die Längen der Rotationsachse und der zweiten Achse des Ellipsoides (seitwärts gezeichnet) durch ihre Hälften **x** und **y** gegeben seien, wobei **y** gleichzeitig den Radius des Äquatorialkreises repräsentiert. Die Gerade, deren Schnittpunkte mit dem Ellipsoid zu bestimmen sind, sei **DV**.

Wir verwandeln das Ellipsoid affin in eine Kugel, indem wir, wie vorher erläutert wurde, die durch **O** senkrecht zu **dv** gelegte Ebene $D_v D_h$ als Affinitätsebene, **dv** als Affinitätsstrahlenrichtung und $\frac{x}{y}$ als charakteristisches Verhältnis wählen. Die besagte Kugel ist sodann durch den Mittelpunkt **O** und den Radius **y** vollständig bestimmt.

Selbstverständlich muss nun gleichzeitig auch die gegebene Gerade **DV** in derselben Weise affin transformiert werden. Der Punkt Δ in welchem dieselbe die Affinitätsebene $D_v D_h$ schneidet,

bleibt hierbei offenbar ungeändert, während man den einem beliebigen Punkte **a** von **DV** entsprechenden Punkt a_1 erhält, wenn man den Schnittpunkt α des Affinitätsstrahles **va** mit der Affinitätsebene bestimmt und die Strecke $a\alpha$ centralprojektivisch (diesfalls mittels des Teilungspunktes **T** von **av**) in dem Verhältnisse $a\alpha : a_1\alpha = x : y$ teilt.

Die transformierte Gerade $a_1\Delta$ oder D_1V_1 schneidet die Kugel (**0**, **y**) in zwei Punkten P_1 und R_1, welche (wie in Aufgabe 140) mittels der durch D_1V_1 gelegten Durchmesserebene $e_v e_h$ erhalten werden und offenbar den Schnittpunkten des Ellipsoides mit der Geraden **DV** affin entsprechen, so, dass man die letzteren unmittelbar als Schnittpunkte **P** und **R** von **DV** mit den Affinitätsstrahlen P_1v und R_1v findet.

§ 384.

146. Aufgabe: **Durch eine Gerade sind an ein Umdrehungsellipsoid die Berührebenen zu legen.**

Auch dieses Problem kann nach der vorhergehend besprochenen Methode durchgeführt werden. Man hätte nämlich wieder das Ellipsoid sowohl, als auch die gegebene Gerade affin so zu transformieren, dass das erstere in eine Kugel verwandelt wird.

Die durch die transformierte Gerade gehenden Kugeltangentialebenen (welche wie in Aufgabe 142 zu konstruieren sind) entsprechen affin den zu suchenden Berührebenen des Ellipsoides, und werden die beiden letzteren als jene Ebenen erhalten, welche durch die gegebene Gerade und die Schnittgeraden der Kugeltangentialebenen mit der Affinitätsebene gelegt werden können.

§ 385.

147. Augabe: **In einer Geraden sind jene Punkte zu bestimmen, deren Abstände von einem gegebenen Punkte und einer gegebenen Ebene in einem bestimmten Verhältnisse stehen.**

In der Skizze [Fig. 284, Taf. XXII] möge **D** die gegebene Ebene in einer zur Bildebene senkrechten Lage und **F** den gegebenen Punkt vorstellen. Ziehen wir durch **F** die zu **D** senkrechte Gerade **Z**, und legen durch **Z** irgend eine Ebene **E**, so wird der geometrische Ort aller Punkte **P** in der letzteren, deren

Abstände von **F** und **D** in einem konstanten Verhältnisse **k** stehen, bekanntlich eine Kurve **M** zweiten Grades sein, für welche **F** den einen Brennpunkt, der Schnitt von **D** und **E** die zugehörige Direktrix und **k** die Excentrizität repräsentiert.

Da sich ferner die Abstände eines Punktes von **F** und **D** nicht ändern, wenn er um **Z** gedreht wird, so ist einleuchtend, dass der geometrische Ort aller Punkte **P** im Raume, deren Abstände von **F** und **D** im Verhältnisse **k** stehen, jene Rotationsfläche zweiten Grades sein wird, die sich durch Umdrehung der Kurve **M** um **Z** ergibt.

Die zu suchenden, in der gegebenen Geraden liegenden Punkte erhält man sodann als die Schnittpunkte der Geraden mit der vorgenannten Rotationsfläche.

§ 386.

148. Aufgabe: **Durch eine Gerade sind an ein zweiteiliges Umdrehungshyperboloid die Berührebenen zu legen und die entsprechenden Berührungspunkte zu bestimmen.**

Bevor wir auf die centralprojektivische Durchführung dieser Aufgabe eingehen, wollen wir zunächst noch die Methode ihrer Lösung auseinander setzen.

Ein zweiteiliges Umdrehungshyperboloid entsteht bekanntlich durch Rotation einer Hyperbel um ihre reelle oder Brennpunktsachse.

Denken wir uns die Rotationsachse **Z** [Fig. 285, Taf. XXII] in der Bildebene liegend und sei **M** die gleichfalls in der Bildebene liegende Meridianhyperbel, seien ferner **A** und **B** ihre Scheitel und F_1 und F_2 ihre Brennpunkte in **Z**.

Die Tangentialebene des Rotationshyperboloides sei nun in einem Punkte **p** dieser Meridianhyperbel **M** zu bestimmen. Besagte Ebene ist durch die Tangente **t** von **M** in **p** und dadurch bestimmt, dass sie (Satz 1, § 364) senkrecht zu der Ebene des Meridians **M** steht.

Führt man durch einen der Brennpunkte, beispielsweise durch F_1, auf die Tangente **t** die Senkrechte $F_1\pi$, so wird dieselbe auch auf der vorgenannten Tangentialebene senkrecht stehen. Weiter liegt der Schnittpunkt π von **t** und $F_1\pi$ (Satz in § 188) auf dem über **AB** als Durchmesser beschriebenen Kreise K_1. Trägt man auf $F_1\pi$ von π aus die Strecke $F_1\pi$ nach $\pi\pi_1$ nochmals auf, so

geht, wie leicht zu finden (§ 188), die Gerade $\pi_1 F_2$ durch den Berührungspunkt **p**.

Berücksichtigt man einerseits, dass π auch den Fusspunkt des von F_1 auf die Tangentialebene gefällten Perpendikels vorstellt, und anderseits, dass der Kreis K_1, also auch der Punkt π auf jener Kugel liegt, welche die Brennpunktsachse **AB** zum Durchmesser hat, so erhalten wir als Ergebnis der angestellten Betrachtung den Satz:

„Der Fusspunkt des von einem Brennpunkte eines zweiteiligen Rotationshyperboloides auf eine Tangentialebene desselben gefällten Perpendikels liegt auf jener Kugel, welche über der Rotationsachse (Brennpunktsachse) des Hyperboloides als Durchmesser beschrieben wird.“

Dieser Satz gestattet folgende Lösung der oben gestellten Aufgabe: Der Einfachheit halber wählen wir die Rotationsachse **Z** [Fig. 286, Taf. XXII] in der Bildebene; ferner seien die Punkte **O**, **A**, **B**, F_1 und F_2 auf **Z** beziehungsweise der Mittelpunkt des Hyperboloides, die Achsenendpunkte und die Brennpunkte desselben. Endlich sei **DV** die Gerade, durch welche die Tangentialebenen an das Hyperboloid geführt werden sollen.

Bezeichnen wir eine dieser Tangentialebenen mit $T_v^1 T_b^1$ oder kurz mit T^1 und den Fusspunkt des vom Brennpunkte F_1 auf dieselbe geführten Perpendikels mit π. Sobald dieser Punkt π bekannt resp. gefunden ist, unterliegt auch die weitere Konstruktion der Tangentialebene keinerlei Schwierigkeiten. Zur Bestimmung von π dienen die nachstehenden Beziehungen.

Nachdem das Perpendikel $F_1\pi$ auf die zu suchende Tangentialebene auch normal zu allen Geraden in der letzteren, also auch normal zur gegebenen Geraden **DV** sein muss, so wird dasselbe und mithin auch der Punkt π in der durch F_1 senkrecht zu **DV** gelegten Ebene $S_v S_b$ liegen. Dem vorbewiesenen Satze entsprechend liegt aber π auch auf jener Kugel, welche über **AB** als Durchmesser beschrieben werden kann, mithin im Schnittkreise **K** dieser Kugel mit der Ebene $S_v S_b$.

Bestimmen wir ferner den Schnittpunkt **a** von **DV** mit $S_v S_b$, so wird offenbar auch die Gerade $a\pi$ auf $F_1\pi$ senkrecht stehen müssen, woraus weiter folgt, dass π auch auf jenem Kreise γ liegen werde, welcher in der Ebene $S_v S_b$ über aF_1 als Durchmesser verzeichnet werden kann. Hiernach ist ersichtlich, dass π der eine oder der andere Schnittpunkt des Kreises γ mit jenem Kreise

K ist, in welchem die Ebene $\mathsf{S_v S_b}$ die über AB gelegte Kugel schneidet.

Legen wir daher den Kreis K sowohl, als auch den Punkt a um $\mathsf{S_b}$ beziehungsweise nach $\mathsf{K_0}$ und $\mathsf{a_0}$ um, und beschreiben über $\mathsf{F_1 a_0}$ den Kreis γ_0, so wird jeder der beiden Schnittpunkte von $\mathsf{K_0}$ und γ_0 als der gesuchte Punkt π_0 betrachtet werden können. Führt man π_0 nach π zurück, so erhält man in $\mathsf{F_1}\pi$ die Normale zur Tangentialebene. Der Fluchtpunkt φ von $\mathsf{F_1}\pi$ liegt selbstverständlich in $\mathsf{S_v}$.

Die durch DV senkrecht zu $\varphi\mathsf{F_1}\pi$ geführte Ebene $\mathsf{T'_v T'_b}$ repräsentiert bereits die geforderte Tangentialebene. Um ihren Berührungspunkt p zu finden, haben wir, wie schon früher bemerkt wurde, die Strecke $\mathsf{F_1}\pi$ von π nochmals nach $\pi\pi'$ aufzutragen (in der Umlegung um $\mathsf{S_b}$ ist $\pi_0\pi'_0 = \mathsf{F_1}\pi_0$) und hierauf die Gerade $\pi'\mathsf{F_2}$ zu ziehen. Der Schnittpunkt p von $\pi'\mathsf{F_2}$ mit $\mathsf{T'_v T'_b}$ ist sodann der verlangte Berührungspunkt. (In Fig. 286, Taf. XXII dienten zu seiner Bestimmung die Geraden $\varphi\mathsf{A}$ und Z, welche zufällig die Flucht- resp. Bildflächtrace einer durch $\pi'\mathsf{F_2}$ gelegten Ebene repräsentieren.) Der zweite Schnittpunkt der vorbezeichneten Kreise γ_0 und $\mathsf{K_0}$ liefert offenbar eine zweite der Aufgabe entsprechende Tangentialebene des zweiteiligen Rotationshyperboloides.

§ 387.

149. Aufgabe: **An ein Rotationsparaboloid ist parallel zu einer gegebenen Ebene eine Berührebene zu legen.**

Wir wählen die Rotationsachse $\mathsf{Z} = \mathsf{Ad}$ [Fig. 287, Taf. XXII] senkrecht zur Bildebene. Auf derselben sei S als der Scheitel des Paraboloides (gemeinschaftlicher Scheitel aller Meridianparabeln) und F als der Brennpunkt (gemeinschaftlicher Brennpunkt aller Meridianparabeln) gegeben.

Da die zu bestimmende Tangentialebene zu einer gegebenen Ebene T parallel sein soll, so heisst dies bekanntlich in centralprojektivischer Darstellung nicht anders, als dass dieselbe eine mit der gegebenen Ebene gemeinschaftliche Fluchttrace $\mathsf{T_v}$ besitze.

Die Meridianebene $\mathsf{P_v P_b}$, welche man senkrecht zu $\mathsf{T_v}$ führt, wird auch auf der zu suchenden Tangentialebene senkrecht stehen, und die in ihr liegende Meridianparabel wird daher (Satz 1, § 364) den Berührungspunkt p der letzteren enthalten.

Nachdem die Schnittgerade der Tangentialebene mit der Meridianebene $P_v P_b$ die Tangente der genannten Meridianparabel im Punkte p ist, so wollen wir zunächst diese Tangente konstruieren. Der Fluchtpunkt derselben ist der Schnittpunkt A_1 von P_v und T_v.

Der der Trace T_v entsprechende Normalenfluchtpunkt v_s ist offenbar auch der Fluchtpunkt aller Geraden in der Ebene $P_v P_b$, welche auf den in A_1 verschwindenden Geraden, also auch auf der zu suchenden Meridiantangente senkrecht stehen. Die Gerade $F v_s$ ist mithin zu der gesuchten Meridiantangente senkrecht. Dieselbe trifft weiter die Scheiteltangente τ der Meridianparabel (das ist die durch den Scheitel S senkrecht zur Achse Z, also parallel zu P_b gezogene Gerade) in dem Punkte π, durch welchen Punkt schliesslich die Meridiantangente t senkrecht zu $F v_s$ (Satz 2, § 188) zu führen ist und somit durch $A_1 \pi$ dargestellt erscheint.

Die durch ihren Durchstosspunkt δ (Schnitt von $t = A_1 \pi$ mit P_b) parallel zu T_v gezogene Gerade T_b repräsentiert demnach die Bildflächtrace der gesuchten Berührebene.

XXIII. Kapitel.

Dreiachsige Flächen zweiten Grades.

§ 388.

150. Aufgabe: **Es sind zwei konjugierte Durchmesser des ebenen Schnittes einer dreiachsigen Fläche zweiten Grades zu konstruieren.**

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, beziehen wir die Aufgabe auf ein durch drei konjugierte Durchmesser gegebenes Ellipsoid.

Behufs Vereinfachung der Konstruktionen wollen wir überdies annehmen, dass zwei dieser Durchmesser, ab und cd [Fig. 288, Taf. XXII] in der Bildebene liegen, während der dritte ef auf der gegen die Bildebene geneigten Geraden ov (o = Durchstosspunkt und gleichzeitig Mittelpunkt der Fläche) sich befinden möge. Die schneidende Ebene sei $E_v E_b$.

Nachdem der ebene Schnitt der Fläche zweiten Grades stets eine Kurve zweiten Grades ist, so werden zu seiner Bestimmung fünf Elemente (Punkte oder Tangenten) vollständig ausreichen, und diese können folgendermassen konstruiert werden.

Das Ellipsoid schneidet die Bildebene in einer Ellipse, welche durch die beiden konjugierten Durchmesser **ab** und **cd** bestimmt ist. Mit Hilfe des über **ab** als Durchmesser beschriebenen mit dieser Ellipse affinen Kreises K_0 können auf bereits bekannte Art die Schnittpunkte **m** und **n** der ersteren mit der Bildebene resp. der Bildflächtrace E_b, d. s. zwei Punkte der Schnittkurve, ermittelt und ebenso die Tangenten $t_1 = T_b^1$ und $t_2 = T_b^2$ der Ellipse (**abcd**) in den Punkten **m** und **n** festgestellt werden.

Die Tangentialebenen des Ellipsoides in den Punkten **m** und **n** gehen beziehungsweise durch die beiden Tangenten T_b^1 und T_b^2, haben also die letzteren Geraden zu ihren Bildflächtracen. Die zugehörigen Fluchttracen T_v^1 und T_v^2 gehen durch den Fluchtpunkt **v** des Durchmessers **ef**, da die Tangentialebenen des Ellipsoides in allen Punkten der Ellipse (**abcd**) zu dem der Ellipsenebene konjugierten Durchmesser **ef** parallel sind (Satz 3, § 292).

Die Tangenten der Schnittkurve in den Punkten **m** und **n** erhält man (§ 263) als die Schnittgeraden τ_1 und τ_2 der Ebene $E_v E_b$ mit den beiden Tangentialebenen $T_v^1 T_b^1$ und $T_v^2 T_b^2$.

Zur vollständigen Bestimmung der Schnittellipse ist nunmehr nur noch ein Punkt erforderlich, und diesen kann man als den einen gemeinschaftlichen Punkt der in der Durchmesserebene $e_v e_b$ liegenden Ellipse **abef** mit der Schnittgeraden $l = \delta\varphi$ der Ebenen $e_v e_b$ und $E_v E_b$ konstruieren. Legt man zu diesem Zwecke den Durchmesser **ef** und die Schnittgerade **l** um e_b beziehungsweise nach $e_0 f_0$ und l_0 um, so wird die umgelegte Ellipse durch die konjugierten Durchmesser **ab** und $e_0 f_0$ bestimmt. Bezieht man diese Ellipse affin auf den über **ab** beschriebenen Kreis K_0, so ist es auf bekannte Weise leicht möglich einen Schnittpunkt p_0 derselben mit l_0 zu bestimmen, und dessen Centralprojektion **p** durch Zurückführen festzustellen.

Die Schnittkurve des Ellipsoides mit der Ebene $E_v E_b$ ist nun durch die drei Punkte **m**, **n**, **p**, und die Tangenten τ_1 und τ_2 in den beiden erstangeführten Punkten vollständig bestimmt.

Zwei konjugierte Durchmesser der besagten Schnittkurve können nunmehr konstruiert werden, indem man die be-

zeichneten fünf Elemente um $\mathfrak{E}_b$ nach $\mathfrak{m}_0$, $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{n}_0$, τ_1^0 und τ_2^0 umlegt (in Fig. 288 nicht ausgeführt), sodann mittels irgend eines den Geraden τ_1^0 und τ_2^0 eingeschriebenen Kollinearkreises (§ 201) zwei konjugierte Durchmesser aufsucht und durch Zurückführung die Projektionen der letzteren bestimmt.

Dieselbe Methode der Bestimmung des ebenen Schnittes einer dreiachsigen Fläche zweiten Grades durch fünf Elemente kann im wesentlichen auch dann beibehalten werden, wenn die Lage der Fläche gegen die Bildebene eine ganz allgemeine ist.

§ 389.

151. Aufgabe: **Zwei Achsen einer dreiachsigen Fläche zweiten Grades liegen in der Bildebene; es sind die Schnittpunkte der Fläche mit irgend einer Geraden zu ermitteln.**

Wir setzen die Fläche als „Ellipsoid" voraus und nehmen an, es seien $\mathfrak{ab}$ und $\mathfrak{cd}$ [Fig. 289, Taf. XXII] die in der Bildebene liegenden Achsen, $\mathfrak{ef}$ die zur Bildebene senkrechte dritte Achse, und $\mathfrak{l}$ die Centralprojektion der in einer zur Bildebene senkrechten Ebene $\mathfrak{e}_v \mathfrak{e}_b$ gegebenen Geraden, deren Schnittpunkte mit der Fläche bestimmt werden sollen.

Die allgemeine Methode zur Lösung der gestellten Aufgabe besteht darin, dass man durch die Gerade irgend eine Ebene legt, die Schnittkurve der letzteren mit der Fläche aufsucht und hierauf die dieser Schnittkurve und der gegebenen Geraden gemeinschaftlichen Punkte konstruiert. Im allgemeinen wird man aber selbstverständlich nicht irgend eine beliebige durch die Gerade gehende Hilfsebene benützen, sondern in jedem besonderen Falle eine solche wählen, deren Schnittkurve mit der Fläche sich am einfachsten bestimmen lässt. So wird man beispielsweise im vorliegenden Falle die zur Bildebene (Achsenebene des Ellipsoides) senkrechte Ebene $\mathfrak{e}_v \mathfrak{e}_b$ mit Vorteil verwenden können.

Da nämlich das Ellipsoid die Bildebene als Achsen- oder Symmetrieebene besitzt, so wird auch der Schnitt der Fläche mit der zur Bildebene senkrechten Ebene $\mathfrak{e}_v \mathfrak{e}_b$ durch die Bildflächtrace $\mathfrak{e}_b$ symmetrisch geteilt werden; es wird somit $\mathfrak{e}_b$ die eine Achse der Schnittkurve repräsentieren. Die Endpunkte $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ derselben ergeben sich als Schnittpunkte mit der in der Bildebene liegenden Hauptellipse $\mathfrak{abcd}$ mittels des über $\mathfrak{ab}$ gelegten Affinkreises $\mathfrak{K}_0$.

Die die Achsen **ab** und **ef** enthaltende Ebene ist ebenfalls senkrecht zur Bildebene, schneidet mithin die Ebene $e_v e_b$ in jener zur Bildebene perpendikulären Geraden, welche durch den Schnittpunkt π der Tracen e_b und h_b geht. Die besagte Schnittgerade selbst trifft wieder die in $h_v h_b$ liegende Hauptellipse **abef** in zwei Punkten, welche sich folgendermassen bestimmen lassen. Man legt **ef** und die vorgenannte Schnittgerade um $h_b = ab$ in die Bildebene nach $e_0 f_0$ resp. $\alpha\pi$ um, so, dass die umgelegte Hauptellipse durch die Achsen **ab** und $e_0 f_0$ dargestellt ist. Die über diesen Achsen beschriebenen Kreise K_0 und γ dienen, wie bekannt, zur Bestimmung der vorbezeichneten Schnittpunkte. Die zu **ab** senkrechte Gerade $\alpha\pi$ schneidet nämlich K_0 in α; ferner trifft die Verbindungsgerade αo den Kreis γ in β, und weiter begegnet die durch β parallel zu **ab** gezogene Gerade $\beta\pi_0$ die Gerade $\alpha\pi$ in dem der Ellipse angehörenden Punkte π_0.

Die Ellipse, in welcher das Ellipsoid von der Ebene $e_v e_b$ geschnitten wird, ist somit bestimmt durch die eine Achse **mn** und durch einen Punkt **p**, welcher in der durch π senkrecht zur Bildebene gezogenen Geraden πA liegt, und von π den Abstand $\pi\pi_0$ besitzt.

Um die Schnittpunkte der Geraden **l** mit dieser Ellipse zu konstruieren, legen wir **l** und **p** (mit Hilfe des Hauptpunktes **A** und des Distanzpunktes **N**) um e_b in die Bildebene beziehungsweise nach l_0 und p_0 um.

Die Ellipse (mn, p_0) beziehen wir affin auf den über **mn** als Durchmesser beschriebenen Kreis K_1^0 (wie in § 210), wobei sich l_0 in (l_0) verwandelt. Den Schnittpunkten (P_0^1) und (P_0^2) von (l_0) und K_1^0 entsprechen dann affin die Schnittpunkte P_0^1 und P_0^2 der umgelegten Ellipse (mn, p_0) mit der umgelegten Geraden l_0.

Führt man schliesslich diese Punkte (mit Hilfe des Hauptpunktes **A** und Distanzpunktes **N**) nach **l** zurück, so erhält man die gesuchten Centralprojektionen P_1 und P_2 der der Geraden **l** und dem Ellipsoide gemeinschaftlichen Punkte.

§ 390.

152. Aufgabe: **Eine Fläche zweiten Grades ist durch einen ihrer Diametralschnitte, ferner durch die Lage des diesem Diametralschnitte konjugierten Durchmessers und durch einen Punkt gegeben; es soll die Tangentialebene der Fläche in diesem Punkte bestimmt werden.**

Nehmen wir allenfalls an, die bezeichnete Fläche sei ein einmanteliges dreiachsiges Hyperboloid, und der gegebene Diametralschnitt, welchen wir der Einfachheit halber in der Bildebene liegend voraussetzen wollen, sei eine Hyperbel mit der reellen Achse **ab** [Fig. 290, Taf. XXII] und den Asymptoten σ_1 und σ_2.

Der der Bildebene konjugierte Durchmesser sei **ov** = **D** (**o** gleichzeitig Mittelpunkt der Fläche und der vorgenannten Hyperbel) und endlich sei **P** der auf dem Träger $\delta\varphi$ gegebene Punkt des Hyperboloides.

Um die Tangentialebene einer Fläche zweiten Grades in einem ihrer Punkte zu konstruieren, kann man mit Vorteil die in Kap. XIV entwickelten polaren Eigenschaften verwenden. So wird man beispielsweise im vorliegenden Falle folgendermassen verfahren können.

Denken wir uns vorerst die durch den Punkt **P** zum Durchmesser **vo** = **D** parallele Gerade $\mathbf{vd_p}$ bestimmt. Dieselbe wird das Hyperboloid noch in einem zweiten Punkte **P'** treffen, welcher mit **P** symmetrisch gegen den Bildflächbdurchstosspunkt $\mathbf{d_p}$ liegt, da (Satz 1, § 292) alle zum Durchmesser **vo** = **D** parallelen Sehnen durch die diesem Durchmesser konjugierte Durchmesserebene (hier die Bildebene) halbiert werden.

Die Tangentialebenen der Fläche in den beiden Punkten **P** und **P'** schneiden sich (Satz in § 286) in der der Geraden **PP'** = $\mathbf{vd_p}$ in bezug auf die Fläche konjugierten Geraden **l**. Durch die Gerade **l** gehen aber weiter (Satz 2, § 284) die Polarebenen aller Punkte von **PP'** = $\mathbf{vd_p}$, also auch die Bildebene als Polarebene des unendlich fernen Punktes **v**, oder mit anderen Worten, die Polare **l** der Geraden **PP'** = $\mathbf{d_p v}$ in bezug auf die Fläche liegt in der Bildebene und repräsentiert gleichzeitig die Bildflächtrace der Tangentialebene des Hyperboloides im Punkte **P** sowohl, als auch im Punkte **P'**.

Weiter wird (Satz in § 285) die Gerade **l** auch die Polare

des Punktes d_p in bezug auf die Hyperbel (ab, σ_1, σ_2) darstellen, und kann in dieser Eigenschaft folgendermassen konstruiert werden.

Wir ziehen durch d_p die zur Achse x senkrechte Gerade η und bestimmen, etwa unter Zuhilfenahme des über ab beschriebenen Hilfskreises γ auf x den Punkt π, welcher mit dem Schnittpunkte π von x und η das Punktepaar ab harmonisch trennt. Wie leicht einzusehen, stellt sodann π_1 die Polare von η in bezug auf die Hyperbel (ab, σ_1, σ_2) dar. Nachdem aber η den Punkt d_p enthält, wird (Satz 2 in § 153) die gesuchte Polare l von d_p durch π_1 gehen.

Ziehen wir ferner den durch d_p gehenden Hyperbeldurchmesser Δ_1, so wird man (Satz in § 178) den ihm konjugierten Durchmesser Δ_2 als jenen Strahl erhalten, welcher mit Δ_1 das Asymptotenpaar $\sigma_1\sigma_2$ harmonisch trennt (Viereckskonstruktion 12345). Gemäss der Definition konjugierter Durchmesser einer Kurve zweiten Grades ist der unendlich ferne Punkt u von Δ_2 der Pol von Δ_1; es muss mithin (Satz 2, § 153) die Polare von d_p durch u gehen, und wird mithin nur jene Gerade l sein können, welche durch π_1 parallel zu Δ_2 geführt werden kann.

Den früheren Betrachtungen entsprechend, ist l gleichzeitig die Bildflächtrace T_b der gesuchten Tangentialebene des Hyperboloides im Punkte P. Die Fluchttrace T_v wird erhalten, wenn man den Träger $\delta\varphi$ oder vd_p von P durch einen anderen $\delta'\varphi'$, dessen Durchstosspunkt δ' in T_b liegt, ersetzt, und durch φ' die Parallele zu T_b führt.

§ 391.

153. Aufgabe: **Ein dreiachsiges Ellipsoid ist durch eine ihrer Kreisebenen (Durchmesserebene der einen Kreisschnittschar), den in derselben liegenden Kreis, und durch den der Kreisebene konjugierten Durchmesser gegeben. Es soll die Tangentialebene der Fläche in einem ihrer Punkte bestimmt werden.**

Der vorgenannte Durchmesser sei in der Geraden dv [Fig. 291, Taf. XXII] centralprojektivisch durch seine Endpunkte a und b bestimmt. Die Kreisebene, welche selbstverständlich durch den Mittelpunkt M der Fläche (Halbierungspunkt der Achse ab) gehen muss, sei $e_v e_b$. Der in dieser Ebene $e_v e_b$ liegende Kreis K besitze den in wahrer Grösse gegebenen Radius r.

Um zunächst einen beliebigen Punkt p des Ellipsoides zu ermitteln, legen wir durch den Durchmesser dv eine beliebige Ebene $\mathsf{h_v h_b}$. Der Schnitt dieser Ebene mit der Fläche ist eine Ellipse k, welcher ab auf dv als der eine Durchmesser entspricht, während der Schnitt $\mathsf{d_1 v_1}$ von $\mathsf{e_v e_b}$ und $\mathsf{h_v h_b}$ den mit ab konjugierten Durchmesser cd vorstellt. Die Länge cd des Durchmessers $\mathsf{d_1 v_1}$ ist selbstverständlich dem Durchmesser des Kreises K, also $2\mathsf{r}$ gleich.

Legen wir die Ebene $\mathsf{h_v h_b}$ um $\mathsf{h_b}$ in die Bildebene um, wobei die beiden konjugierten Durchmesser ab und cd in wahrer Grösse und Lage $\mathsf{a_0 b_0}$ resp. $\mathsf{c_0 d_0}$ (wobei $\mathsf{c_0 M_0 = M_0 d_0 = r}$) erscheinen, so kann man mit Hilfe des über $\mathsf{a_0 b_0}$ beschriebenen Hilfskreises γ leicht einen beliebigen Punkt $\mathsf{p_0}$ der Ellipse $\mathsf{k_0}$, sowie die demselben entsprechende Tangente $\mathsf{t_0}$ konstruieren.

Zurückgeführt erhält man den Punkt p, welcher der Ellipse k, also auch dem Ellipsoide selbst angehört, und die Gerade $\mathsf{t} = \delta\varphi$, welche in p sowohl die Ellipse k, als auch das Ellipsoid berührt.

Da zur Bestimmung der Tangentialebene des Ellipsoides in dem Punkte p die Kenntnis einer zweiten Flächentangente hinreicht, so kann man vorteilhaft folgendermassen vorgehen.

Wir ziehen (in der Umlegung) durch $\mathsf{p_0}$ die Parallele $\mathsf{p_0 o_0}$ zu $\mathsf{c_0 d_0}$, und führen den Schnittpunkt $\mathsf{o_0}$ von $\mathsf{a_0 b_0}$ und $\mathsf{p_0 o_0}$ nach o zurück. Die Centralprojektion von $\mathsf{p_0 o_0}$ ist sodann die Gerade po, welche, als parallel mit cd resp. $\mathsf{d_1 v_1}$, ihren Fluchtpunkt in $\mathsf{v_1}$ hat.

Die durch p parallel zur Ebene $\mathsf{e_v e_b}$ gelegt gedachte Hilfsebene schneidet den Durchmesser $\mathsf{ab = dv}$ in dem Punkte o, und das Ellipsoid dagegen (Satz 1, § 294 und Satz 2, § 299) in einem Kreise $\mathsf{K_1}$, welcher einerseits durch p geht, anderseits aber den Mittelpunkt o und den Radius $\mathsf{r_1 = o_0 p_0}$ besitzt.

Die Tangente des Kreises $\mathsf{K_1}$ im Punkte p ist senkrecht zum Kreisradius po. Den Fluchtpunkt φ_1 derselben erhalten wir (indem wir das Projektionscentrum um $\mathsf{e_v}$ nach $\mathsf{C'_0}$ umlegen) im Schnitte von $\mathsf{e_v}$ mit dem zu $\mathsf{C'_0 v_1}$ senkrechten Fluchtstrahle $\mathsf{C'_0}\varphi_1$.

Nachdem die Tangentialebene der Fläche im Punkte p die eben gefundene Kreistangente $\mathsf{p}\varphi_1$ und die früher bestimmte Tangente $\mathsf{t} = \delta\varphi$ enthält, so ergibt sich ihre Fluchttrace $\mathsf{T_v}$ als die Verbindungsgerade der Fluchtpunkte φ und φ_1, während die Bildflächtrace $\mathsf{T_b}$ der zu bestimmenden Tangierungsebene als die Parallele durch δ zu $\mathsf{T_v}$ gefunden wird.

§ 392.

154. Aufgabe: **Ein dreiachsiges zweimanteliges Hyperboloid ist durch seinen Asymptotenkegel und durch einen der Fläche angehörenden Punkt gegeben; es ist die Tangentialebene der Fläche in diesem Punkte zu bestimmen.**

Der Scheitel des Asymptotenkegels und Mittelpunkt des Hyperboloides **M** [Fig. 292, Taf. XXII] sei auf dem Träger $\delta\varphi$ gegeben; ferner seien **ab** und **cd** die Achsen der Kurve **K** zweiten Grades (Ellipse), in welcher dieser Kegel die Bildebene schneidet, und endlich sei **p** der dem Hyperboloide angehörende (also notwendig innerhalb des Asymptotenkegels anzunehmende) Punkt, bestimmt durch den Träger $\delta'\varphi'$.

Die Tangentialebene der Fläche im Punkte **p** ist (Satz 1, § 294) parallel zu jener Durchmesserebene **D**, welche mit dem nach dem Berührungspunkte **p** gezogenen Flächendurchmesser **Mp** konjugiert ist.

Ein Durchmesser und eine Durchmesserebene einer Fläche zweiten Grades sind konjugiert, wenn ihre unendlich fernen Elemente bezüglich der Fläche, also speziell auch bezüglich der unendlich fernen Kurve dieser Fläche, konjugiert sind.

Da das Hyperboloid und dessen Asymptotenkegel sowohl einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt, als auch eine gemeinschaftliche unendlich ferne Kurve besitzen, so folgt, dass die vorgenannte Durchmesserebene **D** dem Durchmesser **Mp** auch in bezug auf den Asymptotenkegel konjugiert sein muss.

Die Bildflächtrace D_b dieser Ebene wird man demnach (Satz 2, § 270) als die Polare des Bildflächdurchstosspunktes **d** von **Mp** in bezug auf die Bildflächspur **K** (**abcd**) des Asymptotenkegels (unter Zuhilfenahme des über **ab** beschriebenen mit **K** affinen Hilfskreises K_0) erhalten. Nachdem die Ebene $D_v D_b$ durch **M** gehen soll, wird auch ihre Fluchttrace D_v auf bekannte Weise leicht gefunden.

Die zu bestimmende Tangentialebene $T_v T_b$ ($T_v = D_v$) ergibt sich, wie bereits vorhin bemerkt wurde, als jene Ebene, welche durch **p** parallel zur Ebene $D_v D_b$ geführt werden kann.

§ 393.

155. Aufgabe: **An ein elliptisches Paraboloid, dessen Achse zur Bildebene senkrecht steht, und welches die Bildebene in einer Ellipse von gegebenen Achsen schneidet, ist parallel zu einer gegebenen Ebene eine Tangentialebene zu legen und der Berührungspunkt derselben zu ermitteln.**

Es sei $Z = Ao$ [Fig. 293, Taf. XXIII] das Bild der Achse des Paraboloides (A = Hauptpunkt, o = Bildflächdurchstosspunkt der Achse Z), S die Projektion des Scheitels der Fläche; ab und cd seien die Achsen der Ellipse in welcher das Paraboloid von der Bildebene geschnitten wird.

Denken wir uns die zur Bildebene senkrechte Hauptebene $A_v A_b = (ab, Z)$ als Affinitätsebene zweier räumlichen affinen Systeme angenommen, die Affinitätsstrahlen senkrecht zu dieser Ebene, und das charakteristische Verhältnis gleich dem Achsenverhältnisse $\frac{oc}{oa}$ der Ellipse ($abcd$) vorausgesetzt, so wird die in der Bildebene liegende Ellipse $abcd$ bei der affinen Transformation in den über ab als Durchmesser beschriebenen Kreis K' übergehen.

Ebenso verwandeln sich alle mit der Ellipse $abcd$ ähnlichen, zur Bildebene parallelen elliptischen Schnitte des elliptischen Paraboloides affin in jene Kreise, welche über den grossen Achsen dieser Ellipsen beschrieben werden können; infolgedessen wird auch das elliptische Paraboloid selbst affin in ein Rotationsparaboloid übergehen, welches mit dem ersteren eine gemeinschaftliche Achse Z, einen gemeinschaftlichen Scheitel S hat und die Bildebene in dem vorgenannten Kreise K' schneidet.

Beziehen wir auch die gegebene Ebene $E_v E_b$ (zu welcher parallel eine Berührebene an das Paraboloid gelegt werden soll) in die affine Transformation mit ein, so wird die verwandelte Ebene $E'_v E'_b$ durch jene Gerade vd gehen, in welcher sich die beiden Ebenen $A_v A_b$ und $E_v E_b$ schneiden, während die beiden Bildflächtracen E_b und E'_b als zwei einander affin entsprechende Geraden erscheinen.

Gleichzeitig wird sich auch die bisher noch unbekannte zu $E_v E_b$ parallele Tangentialebene des elliptischen Paraboloides affin in die zur Ebene $E'_v E'_b$ parallele Tangentialebene des Rotations-

paraboloides verwandeln, so, dass sodann die erstere Ebene leicht aus der letzteren abgeleitet werden kann. Diese letztere aber sind wir in der Lage sofort zu konstruieren.

Legen wir zunächst durch die Achse Z die zur Ebene $E'_v E'_b$ senkrechte Meridianebene $M_v M_b$ des Rotationsparaboloides, so wird (Satz 1, § 364) der Berührungspunkt des Paraboloides mit der zu $E'_v E'_b$ parallelen Tangentialebene einerseits der in der Ebene $M_v M_b$ liegenden Meridianparabel angehören, anderseits aber wird er auch der Berührungspunkt der letzteren mit jener Tangente sein, welche zur Schnittgeraden $v'd'$ der Ebenen $M_v M_b$ und $E'_v E'_b$ parallel ist.

Die Meridianparabel selbst ist bestimmt durch die Achse Z, den Scheitel S und den einen oder den anderen der beiden Punkte m und n, welche dem Kreise K' und der Trace M_b gleichzeitig angehören.

Legen wir den Scheitel S und die Achse $Z = oS$ um M_b beziehungsweise nach S_0 und $Z_0 = oS_0$ um, so haben wir die Strecke oS_0 von S_0 nochmals auf Z_0 nach ν aufzutragen, um, wie bekannt, in νn die Tangente der Parabel im Punkte n zu erhalten. Führen wir ferner zu dieser Tangente $n\nu$ durch ihren Schnittpunkt ν' mit der Scheiteltangente τ_0 (τ_0 durch S_0 senkrecht zu Z_0 gezogen) eine Senkrechte $\nu' F_0$, so trifft diese die Achse Z_0 (Satz 2, § 188) in dem Parabelbrennpunkte F_0.

Um die zur umgelegten Geraden $d'v'$ oder, was dasselbe ist, die zu ihrem umgelegten Fluchtstrahle $C_0 v'$ parallele Parabeltangente zu finden, haben wir bloss (Satz 2, § 188) durch F_0 zu $C_0 v'$ die Senkrechte η und durch deren Schnittpunkt α mit τ_0 die Parallele t'_0 zu $C_0 v'$ zu ziehen.

Der Berührungspunkt p'_0 von t'_0 ergibt sich (wenn man die Strecke $\alpha\pi$ auf η gleich αF_0 macht) im Schnitte p'_0 von t'_0 mit der durch π zur Achse Z_0 parallel gezogenen Geraden.

In die Projektion zurückgeführt, erhält man aus p'_0 das Bild p' jenes Punktes, in welchem das Rotationsparaboloid von der zu $E'_v E'_b$ parallelen Tangentialebene berührt wird, und aus t'_0 das Bild $t' = v'd'_1$ einer dieser Tangentialebene angehörenden Geraden, so dass man die Tracen T'_v und T'_b ($T'_v = E'_v$) dieser Tangentialebene unmittelbar zeichnen kann.

Die Tangentialebene $T'_v T'_b$ schneidet die Affinitätsebene $A_v A_b$ in der Geraden vd_2, so, dass wir die ihr affin entsprechende Ebene, d. i. die gesuchte Tangentialebene des elliptischen Para-

boloides, als die durch vd_2 parallel zu $E_v E_b$ gelegte Ebene $T_v T_b$ erhalten.

Um endlich auch noch den Berührungspunkt p aus p' affin abzuleiten, führen wir einerseits durch p' den Affinitätsstrahl (senkrecht zu A_b), ferner die Gerade $p'\gamma = \rho$ parallel zu E_b^1 und durch den Schnitt γ derselben mit vd_2 die ihr entsprechende Gerade $\gamma p = \mu$ parallel zu E_b. Im Schnitte von γp mit pp' erhält man in p das Bild des Berührungspunktes von $T_v T_b$.

§ 394.

156. Aufgabe: **Eine Fläche zweiten Grades, welche die Bildebene in einem Kreise K [Fig. 294, Taf. XXIII] schneidet, sei durch diesen Kreis und durch vier Flächenpunkte a, b, c und d gegeben; es ist die Tangentialebene der Fläche im Punkte a zu konstruieren.**

Die drei Punkte a, b, c [Fig. 294, Taf. XXIII] mögen in einer Ebene $e_v e_b$ gegeben sein, während der vierte Punkt d durch eine zweite Ebene $e_v^1 e_b^1$, welche ebenfalls die beiden Punkte a und b, also auch die Gerade $ab = \delta\varphi$ enthält, bestimmt sein möge.

Die Ebene $e_v e_b$ schneidet die Fläche in einer Kurve zweiten Grades, welche durch die drei Punkte a, b, c und durch die Schnittpunkte m und n von K und e_b geht. Die Tangente $\tau_a = \delta_a \varphi_a$ dieser Kurve im Punkte a kann leicht (§ 128) konstruiert werden, indem man das Fünfeck $abmnc$ durch die zu bestimmende Tangente τ_a zu einem der Schnittkurve eingeschriebenen degenerierten Sechseck ergänzt denkt.

In gleicher Weise erhält man den Schnitt der Fläche mit der Ebene $e_v^1 e_b^1$ als eine durch a, b, d und die imaginären Schnittpunkte m' und n' von e_b^1 und K gehende Kurve K' zweiten Grades. Die Tangente $\tau_a^1 = \delta_a^1 \varphi_a^1$ derselben in a ergibt sich in nachstehender Weise:

Die drei Geraden ab, ad, bd und die zu bestimmende Tangente τ_a^1 im Punkte a sind die Seiten eines degenerierten, der Kurve K' eingeschriebenen Viereckes. Bezeichnen δ, Δ und Δ' die Schnittpunkte von ab, ad und bd mit e_b^1 und weiter δ_a^1 den noch unbekannten Schnittpunkt von e_b^1 und τ_a^1, so sind nach dem Desargues'schen Satze m', n'; Δ, δ; Δ, δ_a^1 drei Paare konjugierter Punkte einer Involution auf e_b^1.

Nachdem aber auch die Kurve **K** mit der Geraden e_b' die beiden imaginären Punkte **m'** und **n'** gemein hat, so gelangt man zu derselben Involution auf folgendem Wege. Die Gerade **ad** trifft **K** in **a'** und **d'**; verbindet man **d'** und Δ' durch eine Gerade, welche **K** zum zweitenmal in **c'** trifft, und ferner **c'** mit δ durch eine Gerade, welche **K** zum zweitenmal in **b'** schneidet, so liefert schliesslich die Verbindungsgerade **a' b'** im Schnitte mit e_b' den gesuchten Punkt δ_a'; denn **a' b' c' d'** ist ein eingeschriebenes Viereck und mithin sind δ, Δ; δ_a', Δ'; **m'**, **n'** drei Punktepaare einer Involution auf e_b'. Der Punkt δ_a', welcher so erhalten wurde, ist also jener, welcher auch der Tangente τ_a' von **K'** in **a** angehört.

Die durch τ_a und τ_a' gelegte Ebene $T_v T_b$ repräsentiert die verlangte Tangentialebene.

§ 395.

157. Aufgabe: **Es ist die Ebene der Berührungskurve einer Fläche zweiten Grades mit dem derselben aus einem gegebenen Punkte umschriebenen Kegel zu bestimmen.**

Wir setzen voraus, die Fläche sei ein dreiachsiges Ellipsoid, von welchem zwei Achsen **AB** und **CD** [Fig. 295, Taf. XXIII] in der Bildebene liegen, während die dritte Achse **EF** in die zur Bildebene senkrechte Gerade **AO** fällt. (**O** ist der Bildflächdurchstosspunkt dieser Geraden und gleichzeitig der Mittelpunkt des Ellipsoides, sowie auch jener der Hauptellipse **ABCD**.) Der Scheitel des der Fläche zu umschreibenden Kegels ist durch seine Centralprojektion **S** auf dem Träger $\delta\varphi$ gegeben.

Die Ebene der Berührungskurve dieses Kegels wird, wie überhaupt jede Ebene, durch drei ihrer Punkte, d. i. diesfalls durch die Berührungspunkte der Fläche mit irgend drei durch **S** gehenden Tangenten oder Tangentialebenen vollständig bestimmt sein. Hierauf stützen sich nachstehende Konstruktionen.

Der geometrische Ort der Tangentialebenen des Ellipsoides in allen Punkten der Hauptellipse **ABCD** ist der durch diese Ellipse gehende zur Bildebene senkrechte Cylinder.

Bestimmt man daher die orthogonale Bildflächprojektion S_1 von **S** und führt von S_1 an die Hauptellipse **ABCD** die Tangenten t_1 und t_2, welche samt ihren Berührungspunkten π_1 und π_2 mittels des über **AB** als Durchmesser beschriebenen Affinkreises γ_0 auf bereits bekannte Art konstruiert werden können, so reprä-

sentieren t_1 und t_2 gleichzeitig die Bildflächtracen zweier durch S gehenden Tangentialebenen des vorgenannten Berührungscylinders, also auch des Ellipsoides, und deren Berührungspunkte π_1 und π_2 mithin zwei Punkte der Berührungskurve des Ellipsoides mit dem demselben aus S umschriebenen Kegel. Nachdem diese beiden Punkte π_1 und π_2 gleichzeitig in der Bildebene liegen, so ist ihre Verbindungsgerade die Bildflächtrace B_b der Ebene der vorgenannten Berührungskurve.

Ein dritter Punkt dieser Ebene wird gefunden, indem man in gleicher Weise von einer zweiten Hauptebene, beispielsweise von der durch die Achsen AB und EF gehenden Ebene $e_v e_b$, Gebrauch macht. Da die besagte Ebene zur Bildebene senkrecht steht, so ist die durch S zu derselben normal geführte Gerade s parallel zur Bildebene und senkrecht zu den Tracen e_v und e_b. Dieselbe schneidet die Ebene $e_v e_b$ in dem Punkte Σ.

Die Tangentialebenen des Ellipsoides längs des Hauptschnittes AB, EF bilden wieder einen zur Hauptebene $e_v e_b$ senkrechten Cylinder, und die durch S gehenden Tangentialebenen dieses Cylinders, welche gleichzeitig auch das Ellipsoid in Punkten der Hauptellipse $ABEF$ berühren, schneiden die Ebene $e_v e_b$ in den beiden durch Σ gehenden Tangenten der eben genannten Ellipse.

Legt man die Achse EF und den Punkt Σ um e_b in die Bildebene beziehungsweise nach $E_0 F_0$ und Σ_0 um, so kann man mittels des über AB beschriebenen Affinkreises γ_0 den Berührungspunkt π_3^0 der Ellipse ABE_0F_0 mit einer durch Σ_0 gehenden Tangente t_3^0 konstruieren und dessen Bild π_3 bestimmen. Die Ebene der Berührungskurve des aus S dem Ellipsoide umschriebenen Kegels ist sodann jene Ebene $B_v B_b$, welche die Bildflächtrace $B_b = \pi_1 \pi_2$ besitzt, und nebstbei durch den Punkt π_3 geht.

§ 396.

158. Aufgabe: **Es ist die Polarebene eines gegebenen Punktes in bezug auf eine Fläche zweiten Grades zu bestimmen.**

Liegt der gegebene Punkt ausserhalb der Fläche, so ist seine Polarebene (Satz, § 283) identisch mit der Ebene der Berührungskurve des aus demselben der Fläche umschriebenen Kegels und kann daher die Konstruktion derselben genau so wie in der vorhergehenden Aufgabe vollzogen werden.

Liegt dagegen der gegebene Pol innerhalb der Fläche, so ist der von ihm als Scheitel der bezeichneten Fläche umschriebene Kegel imaginär, das obige Verfahren also nicht mehr anwendbar.

In dem letzteren Falle könnte man direkt von der Definition der Polarebene „als Ort der mit dem Pole bezüglich der Fläche konjugierten Punkte" in der Weise Gebrauch machen, dass man durch den Pol drei passend gewählte Strahlen zieht, die Schnittpunktpaare derselben mit der Fläche bestimmt, und hierauf jene drei Punkte auf denselben Strahlen sucht, welche mit dem Pole die genannten Schnittpunktpaare harmonisch trennen. Die durch diese drei Punkte gehende Ebene wäre sodann die gesuchte Polarebene.

Eine anderweitige einfachere Bestimmung der Polarebene, die hier ihre Besprechung finden möge, erfordert zunächst die Auflösung der umgekehrten Aufgabe.

§ 397.

159. Aufgabe: **Es ist der Pol einer gegebenen Ebene in bezug auf eine Fläche zweiten Grades zu bestimmen.**

Auch diesfalls sind die beiden Fälle, dass der Schnitt der Fläche mit der gegebenen Ebene reell oder imaginär sein kann, zu unterscheiden.

a) Die Polarebene schneidet die Fläche zweiten Grades in einer reellen Kurve.

Ist die Fläche durch ihre drei Achsen oder durch drei konjugierte Durchmesser gegeben, so wird man, wie in der vorhergehenden Aufgabe, den Umstand benützen, dass die gegebene Polarebene gleichzeitig die Ebene der Berührungskurve des der Fläche vom Pole aus umschriebenen Kegels ist, und hierauf drei Tangentialebenen dieses Kegels zu konstruieren suchen, was etwa in nachstehender Weise geschehen kann.

Seien allenfalls **ab**, **cd** und **ef** (ohne Figur) die drei konjugierten Durchmesser der Fläche. Bestimmt man die beiden Schnittpunkte **m** und **n** der Diametralkurve **abcd** mit der gegebenen Polarebene **p**, so erhält man zwei Punkte der Berührungskurve. Diese Punkte sowie die Tangenten t_m und t_n der Kurve **abcd** in den bezeichneten Punkten kann man mittels eines kollinearen oder affinen Kreises auf bekannte Art erhalten.

Die durch die Tangenten t_m und t_n parallel zu dem dritten Durchmesser **ef** gelegten Ebenen T_m und T_n berühren sodann die Fläche in den Punkten **m** und **n**, mithin auch den früher genannten der Fläche umschriebenen Kegel, und gehen daher durch den gesuchten Pol **P**. Eine dritte durch den Pol **P** gehende Ebene T_r kann gefunden werden, indem man in gleicher Weise von einer zweiten Durchmesserebene, beispielsweise von **abef** und dem der Fläche längs des Diametralschnittes **abef** umschriebenen Cylinder Gebrauch macht. Im Schnitte der drei Tangentialebenen T_m, T_n und T_r erhält man schliesslich den verlangten Pol **P**.

§ 398.

b) Die Polarebene schneidet die Fläche zweiten Grades in keiner reellen Kurve.

In diesem Falle kann der in § 287 angeführte Satz, gemäss welchem der Schnittpunkt der Polarebenen dreier Punkte der Pol der durch diese drei Punkte gehenden Ebene ist, seine Verwendung finden. Man wird dementsprechend in der gegebenen Polarebene drei Punkte wählen und deren Polarebenen bestimmen, um im Schnitte derselben den gesuchten Pol zu erhalten.

Die Einfachheit der Konstruktion hängt diesfalls von der zweckmässigen Wahl der obbezeichneten drei Punkte ab. Es empfiehlt sich diesbezüglich besonders nachstehende Methode.

Seien **ab**, **cd**, **ef** [Fig. 296, Taf. XXIII] die drei konjugierten Durchmesser, welche die Fläche zweiten Grades bestimmen; seien ferner d_1v_1, d_2v_2 und d_3v_3 die Centralprojektionen der drei Geraden, in welchen diese Durchmesser liegen und sei E_vE_b die gegebene Polarebene.

Zunächst bestimmen wir die drei Schnittpunkte P_1, P_2 und P_3 dieser Ebene **E** mit den vorbezeichneten Durchmessern d_1v_1, d_2v_2, d_3v_3, und betrachten dieselben als Pole dreier Ebenen.

Die Polarebene $p_v^1p_b^1$ des Punktes P_1 wird (Satz 2, § 284), da P_1 auf dem Durchmesser d_1v_1 liegt und der letztgenannte Durchmesser die Polare der unendlich fernen Geraden der ihm konjugierten Durchmesserebene $(d_2v_2, d_3v_3) = D_v^1D_b^1$ vorstellt, zu dieser Durchmesserebene parallel sein. Es fällt also p_v^1 mit D_v^1 zusammen. Dieselbe ist weiter dadurch bestimmt, dass sie durch jenen Punkt π_1 von d_1v_1 geht, welcher mit P_1 die Endpunkte **a** und **b** des Durchmessers d_1v_1 harmonisch trennt.

In gleicher Weise können die bezüglichen Polarebenen $p_v^2 p_b^2$, $p_v^3 p_b^3$ der beiden anderen Punkte P_2 und P_3 konstruiert werden. Der Schnittpunkt P der drei Polarebenen $p_v^1 p_b^1$, $p_v^2 p_b^2$ und $p_v^3 p_b^3$ ist sodann (Satz, § 287) der gesuchte Pol der Ebene $E_v E_b$.

Wie ohne weiteres erkennbar, ist die eben erläuterte Methode allgemeiner als die in § 397 angegebene, und ist auch für den dort behandelten Fall anwendbar.

§ 399.

Die eben erörterten Konstruktionen geben durch einfache Umkehrung auch eine Lösung des in § 396 gestellten Problems.

Es sei also die Polarebene $E_v E_b$ des Punktes P [Fig. 296, Taf. XXIII] in bezug auf die durch die drei konjugierten Durchmesser $ab = d_1 v_1$, $cd = d_2 v_2$ und $ef = d_3 v_3$ gegebene Fläche zweiten Grades zu konstruieren.

Führt man durch P die drei Ebenen $p_v^1 p_b^1$, $p_v^2 p_b^2$, $p_v^3 p_b^3$ beziehungsweise parallel zu den drei Durchmesserebenen $(d_2 v_2,\ d_3 v_3) = D_v^1 D_b^1$, $(d_3 v_3,\ d_1 v_1) = D_v^2 D_b^2$ und $(d_1 v_1,\ d_2 d_2) = D_v^3 D_b^3$, so schneiden dieselben die drei Durchmesser $d_1 v_1$, $d_2 v_2$, $d_3 v_3$ beziehungsweise in den Punkten π_1, π_2 und π_3. Die Punkte P_1, P_2, P_3, welche mit π_1, π_2 und π_3 die bezüglichen Punktepaare ab, cd und ef harmonisch trennen, sind sodann, wie aus den vorherigen Betrachtungen klar wurde, die Pole der drei Ebenen $p_v^1 p_b^1$, $p_v^2 p_b^2$ und $p_v^3 p_b^3$.

Legt man endlich durch P_1, P_2 und P_3 eine Ebene $E_v E_b$, so wird dieselbe (Satz, § 287) die gesuchte Polarebene des Punktes P repräsentieren.

§ 400.

160. Aufgabe: **Durch einen Punkt ist eine Ebene so zu legen, dass derselbe gleichzeitig der Mittelpunkt der Schnittkurve dieser Ebene mit einer gegebenen Fläche zweiten Grades wird.**

Bezeichnen wir den gegebenen Punkt mit P. Auf dem durch P gehenden Durchmesser der Fläche wird es einen Punkt S geben, dessen Polarebene s durch P geht. Es wird sodann (Satz, § 297) P auch der Mittelpunkt der Schnittkurve der Ebene s mit der Fläche sein; besagte Ebene wird also den gestellten Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Um dieselbe zu ermitteln, haben wir bloss zu berücksichtigen, dass die Polarebenen aller Punkte eines Durchmessers der Fläche zweiten Grades untereinander und zu der diesem Durchmesser konjugierten Durchmesserebene parallel sind.

Bestimmt man daher (wie in § 399) die Polarebene irgend eines Punktes des durch **P** gehenden Durchmessers, etwa jene des Punktes **P** selbst, so hat man bloss durch **P** zu dieser Polarebene eine parallele Ebene zu legen, um die gestellte Aufgabe ihrer schliesslichen Lösung zuzuführen.

§ 401.

161. Aufgabe: **Es ist die Polare einer gegebenen Geraden in bezug auf eine Fläche zweiten Grades zu bestimmen.**

Nachdem die Polarebenen aller Punkte einer Geraden durch die Polare dieser Geraden gehen (Satz 2, § 284), so werden wir behufs Lösung des gestellten Problems auf der gegebenen Geraden bloss zwei Punkte derartig zu wählen haben, dass deren Polarebenen in bezug auf die Fläche leicht und einfach konstruiert werden können, um sodann im Schnitte dieser beiden Ebenen sofort die verlangte Polare zu erhalten.

Nehmen wir an, die gegebene Fläche zweiten Grades sei ein dreiachsiges einmanteliges Hyperboloid, welches die Bildebene als eine Diametralebene besitze. Der zugehörige Diametralschnitt sei eine Hyperbel, welche durch zwei konjugierte Durchmesser **ab** und **cd** [Fig. 297, Taf. XXIII], von welchen **ab** reell und **cd** imaginär ist, gegeben sei. Weiter diene zur Bestimmung der Fläche der der Bildebene konjugierte Durchmesser **ef** auf **ov**, so, dass das Hyperboloid durch drei konjugierte Durchmesser **ab**, **ef** und **cd**, wovon die beiden ersten reell, der dritte hingegen imaginär ist, gegeben erscheint. Endlich sei **DV** die Gerade, deren Polare in bezug auf die Fläche bestimmt werden soll.

Wie eingangs bemerkt wurde, haben wir auf **DV** zwei Punkte zu wählen, deren Polarebenen leicht bestimmt werden können. Zu diesem Zwecke eignen sich am besten einerseits der Bildflächdurchstosspunkt **D** und anderseits der Schnittpunkt **P** der Geraden **DV** mit der Durchmesserebene $e_v e_b = (ab, ef)$.

Da der Durchmesser $ov = ef$ der Bildebene konjugiert ist, also der unendlich ferne Punkt von **ef** den Pol der Bildebene bezüglich des Hyperboloides repräsentiert, so wird die Polarebene

$p_v^1 p_b^1$ des in der Bildebene liegenden Punktes **D** (Satz 1, § 284) zum Durchmesser **ov** = **ef** parallel sein. Die Bildflächtrace p_b^1 dieser Polarebene ist aber (Satz 2, § 282) die Polare des Punktes **D** in bezug auf die in der Bildebene liegende Hyperbel (**ab**, **cd**), und kann als solche wie folgt konstruiert werden.

Zunächst leiten wir aus den beiden konjugierten Durchmessern **ab** und **cd** der Hyperbel die Asymptoten σ_1 und σ_2 derselben auf bekannte Weise ab. Ferner ziehen wir die Strahlen **Da** und **Db** und bestimmen (Satz 2, § 178) die Punkte α und β, in welchen besagte Strahlen die Hyperbel zum zweitenmal schneiden.

Die Polare p_b^1 von **D** geht (§ 152) durch die Schnittpunkte der Geradenpaare **ab** und $\alpha\beta$; **a**β und α**b**. Die Fluchttrace p_v^1 der Polarebene von **D** ist sodann die durch **v** zu p_b^1 geführte Parallele.

In gleicher Weise ist die Polarebene des Punktes **P** in bezug auf das Hyperboloid zu bestimmen.

Da nämlich **P** in der Durchmesserebene (**ab**, **ef**) = $e_v e_b$ liegt, so wird seine Polarebene $p_v^2 p_b^2$ einerseits zu dem dieser Durchmesserebene konjugierten Durchmesser **cd** parallel sein, und anderseits wird sie (Satz 2, § 282) die Ebene $e_v e_b$ in der Polare π des Punktes **P** bezüglich der Diametralellipse **abef** schneiden.

Legen wir **P** und **ef** um e_b nach P_0 und $e_0 f_0$ um, und bestimmen die umgelegte Polare π_0 von P_0 in bezug auf die gleichfalls umgelegte Ellipse **ab**, $e_0 f_0$ mit Hilfe des über **ab** beschriebenen Affinkreises K_0^1, so erhält man durch Zurückführung ihre Centralprojektion $\pi = \delta\varphi$. Die Polarebene $p_v^2 p_b^2$ ist, wie oben gezeigt wurde, die durch $\delta\varphi$ parallel zu **cd** geführte Ebene.

Der Schnitt $D^1 V^1$ der beiden Ebenen $p_v^1 p_b^1$ und $p_v^2 p_b^2$ repräsentiert die gesuchte Polare der Geraden **DV**.

§ 402.

162. Aufgabe: **Ein durch den Scheitel und durch einen zu einer seiner Achsen senkrechten Schnitt gegebener Kegel zweiten Grades ist nach einem Kreise zu schneiden.**

Die Achse des Kegels wählen wir als eine zur Bildebene senkrechte Gerade **Z** = **oA** [Fig. 298, Taf. XXIII], **S** sei das Bild des Kegelscheitels. Die Bildebene werde von dem Kegel in einer Ellipse **K** geschnitten, welche durch ihre Achen **ab** und **cd** gegeben ist.

Sind wir in der Lage, eine Kugel zu konstruieren, welche den Kegel in zwei Punkten berührt, so wird (Satz, § 308) der Schnitt beider Flächen in zwei ebene Kurven zweiten Grades zerfallen, welche in diesem Falle notwendig Kreise sein müssen, nachdem eine ebene Kurve auf einer Kugel nur ein Kreis sein kann.

Eine derartige Kugel kann aber leicht auf folgende Art bestimmt werden. Wir legen die beiden Kegelerzeugenden, welche nach den Endpunkten **a** und **b** der grossen Achse der Ellipse **K** gehen, um die Bildflächtrace $e_b = ab$ ihrer Ebene nach S_0a und S_0b um. Ferner zeichnen wir einen Kreis, welcher die beiden Geraden S_0a und S_0b berührt, etwa jenen Σ_0, dessen Berührungspunkte **a** und **b** selbst sind, und dessen Mittelpunkt der Punkt m_0 auf S_0o sei.

Führen wir den Punkt m_0 nach **m** auf **Z** zurück, und denken wir uns denselben als Mittelpunkt einer Kugel vom Radius $r = m_0a$. Diese Kugel wird von der durch **ab** und **Z** gehenden Ebene $e_v e_b$ in jenem Kreise geschnitten, der, um e_b umgelegt, in Σ_0 dargestellt ist. Die Kugel geht demnach durch die Punkte **a** und **b**, und wird in denselben von den Kegelerzeugenden **Sa** und **Sb** berührt.

Die Tangentialebenen der Kugel in den beiden Punkten **a** und **b** sind mithin jene beiden Ebenen T^a und T^b, welche durch die genannten Kegelerzeugenden **Sa** und **Sb** senkrecht zur Ebene $e_v e_b$ geführt werden können. Diese Ebenen T^a und T^b berühren aber, wie leicht einzusehen, auch den Kegel längs den Erzeugenden **Sa** und **Sb**, woraus (mit Rücksicht auf den in § 308 aufgestellten Satz) folgt, dass der Schnitt der Hilfskugel mit dem Kegel aus zwei Kreisen besteht, die durch die Punkte **a** und **b** gehen, deren Ebenen also die Gerade **ab** zur gemeinschaftlichen Bildflächtrace haben.

Die Punkte, in welchen irgend eine Kegelerzeugende, beispielsweise **Sc**, die Kugel trifft, gehören offenbar gleichfalls den beiden Kreisen, und mithin auch den Ebenen E^1 und E^2 der letzteren an. Um diese Schnittpunkte zu bestimmen, legen wir die durch **Z** und **cd** gehende Ebene $e'_v e'_b$ samt der Erzeugenden **Sc** und dem grössten Kreise Σ', in welchem sie die Kugel schneidet, beziehungsweise nach S'_0c und Σ'_0 um, und führen die Schnittpunkte p'_0 und p''_0 beider nach p' und p'' zurück.

Die Ebenen $E^1_v E^1_b$ und $E^2_v E^2_b$, welche durch die Punkte p' und p'' und durch die Gerade **ab** bestimmt werden, sind die vorgenannten Kreisebenen.

Wäre nun etwa die Aufgabe zu lösen, den Kegel durch Ebenen, welche einen gegebenen Punkt **P** enthalten, nach Kreisen zu schneiden, so hätte man (mit Beachtung des in § 299 angeführten Satzes 2) bloss durch **P** zu den Ebenen $E_v^1 E_b^1$ und $E_v^2 E_b^2$ parallele Ebenen zu legen.

Die Lösung der vorstehenden Aufgabe schliesst auch die Bestimmung der Kreisschnitte des einmanteligen sowohl als auch des zweimanteligen dreiachsigen Hyperboloides in sich; denn bestimmt man die Kreisschnittsebenen des Asymptotenkegels eines Hyperboloides, so müssen dieselben (Satz, § 301) offenbar auch Kreisschnittsebenen des Hyperboloides selbst sein.

§ 403.

163. Aufgabe: **Es sind die Kreisschnittsebenen eines dreiachsigen Ellipsoides zu bestimmen.**

Die Methode der Lösung des gestellten Problems beruht, ebenso wie im vorhergehenden Falle, auf der Verwendung einer Hilfskugel, welche das Ellipsoid in zwei Punkten berührt.

Setzen wir voraus, das Ellipsoid sei durch seine drei Achsen gegeben, wovon die längste **ab** und die mittlere **cd** [Fig. 299, Taf. XXIII] in der Bildebene liegen mögen, während die kürzeste Achse $ef = OA$ zur Bildebene senkrecht stehe.

Nehmen wir nun eine mit dem Ellipsoide konzentrische Hilfskugel an, deren Durchmesser der mittleren Achse **cd** gleich ist, welche also durch die Punkte **c** und **d** geht.

Die durch **c** und **d** gehenden, zur Achse **cd** senkrechten Ebenen berühren die Kugel sowohl, als auch das Ellipsoid in **c** und **d**, woraus (mit Rücksicht auf den in § 308 aufgestellten Satz) folgt, dass der Schnitt der Kugel mit dem Ellipsoide aus zwei Kreisen besteht, welche durch die Punkte **c** und **d** gehen und zu deren vollständigen Bestimmung noch die Kenntnis je eines Punktes ebenso erforderlich als hinreichend ist.

Zu diesem Zwecke denken wir uns den grössten Kugelkreis **K**, in welchem die Achsenebene $e_v e_b = (ab, ef)$ die Hilfskugel schneidet, sowie auch die Achsenellipse (ab, ef) um e_b in die Bildebene beziehungsweise nach K_0 und $(ab, e_0 f_0)$ umgelegt, und bestimmen die Schnittpunkte beider. Dies lässt sich folgendermassen bewerkstelligen.

Wir beschreiben über ab und $e_0 f_0$ die beiden Kreise K_1 und K_2, und weiter über der Differenz ae' ihrer Radien den Kreis γ. Der letztere trifft den Kreis K_0 in π und π'. Dreht man nun das bei π rechtwinklige Dreieck $a\pi e'$ so lange um O, bis in der neuen Lage $\alpha p'_0 \varepsilon$ die Katheten $\alpha p'_0$ und $\varepsilon p'_0$ beziehungsweise zu den Achsen $e_0 f_0$ und ab parallel werden (einfach dadurch, dass man $O\alpha$ parallel zu $e'\pi'$ zieht), so folgt aus einer bekannten elementaren Eigenschaft, dass p'_0 gleichzeitig dem Kreise K_0 und der Ellipse $abe_0 f_0$ angehört. Derartig gemeinschaftlicher Punkte erhält man noch drei d. i. p_0^2, p_0^3 und p_0^4, welche mit p_0^1 ein Rechteck vom Mittelpunkte O bilden, dessen Seiten beziehungsweise zu den Achsen ab und $e_0 f_0$ parallel sind.

Führt man nun beispielsweise die Gerade $p_0^1 O p_0^3$ in die Projektion nach $O\varphi'$ zurück, so wird dieselbe mit cd die *eine Kreisebene* bestimmen, da sie einen der *Kugel und dem Ellipsoide gemeinschaftlichen Punkt* p^1 enthält.

Die *zweite Kreisebene* erhält man unter Benützung des Punktes p_0^2 resp. der Geraden $p_0^2 O p_0^4$.

XII. Abschnitt.

Umhüllungsflächen.

XXIV. Kapitel.

§ 404.

Bei der Einteilung der Flächen (§ 258 und 259) sind wir von der Erzeugung derselben durch Linien ausgegangen. Es gibt jedoch noch eine besondere Erzeugungsart, die von den bereits entwickelten Erzeugungsweisen der Form nach verschieden ist (schliesslich aber, dem Wesen nach, doch wieder auf die Erzeugung durch eine bestimmte Linie reduziert werden kann).

Genau so, wie man eine ebene krumme Linie das eine Mal als geometrischen Ort aller ihrer Punkte, das andere Mal jedoch als die „Einhüllende" oder „Enveloppe" einer einfach unendlichen Anzahl stetig aufeinander folgender Kurven auffassen kann, so kann auch eine krumme Fläche das eine Mal als Erzeugnis einer veränderlichen Kurve, das andere Mal als „Einhüllende" oder „Enveloppe" einer einfach unendlichen Zahl stetig aufeinander folgender Flächen betrachtet werden.

Seien F_1, F_2 . . . F_k . . . F_n . . . unmittelbar aufeinander folgende Lagen einer Fläche F, welche nach einem bestimmten Gesetze entweder bloss ihre Lage im Raume allein, oder gleichzeitig auch ihre Form stetig ändert.

Je zwei unmittelbar aufeinander folgende Flächenlagen, wie F_1 und F_2, F_2 und F_3 . . . F_k und F_{k+1} . . . schneiden sich in einer Kurve C_{12}, C_{23} . . . C_{kk+1} . . . . Es ist einleuchtend, dass diese Kurven ebenso wie die Flächen, deren Schnitte sie sind, stetig aufeinander folgen, dass also zwei unmittelbar aufeinander folgende Lagen dieser Kurven nur unendlich wenig voneinander verschieden sein können.

Die vorgenannten Kurven werden mithin eine krumme Fläche erzeugen, die wir kurz mit **U** bezeichnen wollen. Den Zusammenhang der so entstehenden Flächen mit den Flächen F_1, F_2 . . . zu untersuchen, wird demnach unsere nächste Aufgabe sein.

Betrachten wir zu diesem Zwecke irgend eine Lage F_k der veränderlichen Fläche. Dieselbe wird von der unmittelbar vorhergehenden Lage F_{k-1} in einer Kurve $C_{k-1,k}$ und von der unmittelbar folgenden Lage F_{k+1} in einer zweiten Kurve $C_{k,k+1}$ geschnitten. Selbstverständlich gehören diese beiden Kurven auch der vorgenannten Fläche **U** an, und sind dieselben unendlich nahe an einander gelegen.

Hieraus folgt, dass die Fläche F_k von der Fläche **U** längs einer Kurve berührt wird, welche als die Vereinigung der beiden unendlich nahen Kurven $C_{k-1,k}$ und $C_{k,k+1}$ angesehen werden kann. Nachdem dasselbe von jeder anderen Lage der veränderlichen Fläche **F** gilt, so werden auch alle Lagen der letzteren mit der Fläche **U** eine Berührung eingehen.

Aus diesem Grunde pflegt man die Fläche **U** die *„Umhüllungsfläche"* oder die *„Enveloppe"* der Flächen F_1, F_2 . . . zu nennen. Die letzteren Flächen dagegen werden die *„umhüllten Flächen"*, und die Kurven C_{12}, C_{23}, . . . , längs welcher sie von der Fläche **U** berührt werden, die *„Charakteristiken"* der Umhüllungsfläche genannt.

§ 405.

Sind die umhüllten Flächen insbesondere Ebenen, so ist die erzeugte Umhüllungsfläche, wie schon aus dem Kap. XVIII hervorgeht, eine aufwickelbare Fläche. Die geradlinigen Erzeugenden derselben repräsentieren sodann gleichzeitig die Charakteristiken der Umhüllungsfläche.

Die aufwickelbaren Flächen bilden, rücksichtlich der Art der umhüllten Flächen, den einfachsten Fall einer Umhüllungsfläche.

Die Umhüllungsflächen teilt man häufig in zwei Klassen, und zwar a) in solche, deren sämtliche umhüllte Flächen untereinander kongruent sind, und b) in solche, deren umhüllte Flächen mit der Lage gleichzeitig die Form und Grösse stetig ändern.

Als ein Beispiel der ersten Art kann der gerade Kreiscylinder betrachtet werden, da er als Umhüllungsfläche aller ihm eingeschriebenen (untereinander kongruenten) Kugeln angesehen

werden kann. Allgemeiner aufgefasst gehören hierher auch die *„Ring-“* und *„Röhren-Flächen“*, worunter man gleichfalls die Umhüllungsflächen einer Kugel von unveränderlichem Radius versteht, deren Mittelpunkt irgend eine Kurve durchläuft.

Ebenso ist bereits (Satz 2, § 364) bekannt, dass eine Rotationsfläche längs jeder Meridiankurve von einem Cylinder berührt wird, und dass sämtliche Meridiane, also auch alle meridianumschriebenen Cylinder untereinander kongruent sind. Es kann somit auch jede Rotationsfläche als die Umhüllungsfläche unendlich vieler kongruenter Cylinder aufgefasst werden, wobei die Meridiankurven gleichzeitig die Charakteristiken repräsentieren.

Jede Rotationsfläche kann aber auch als Umhüllungsfläche der zweiten Art betrachtet werden, wenn man die längs ihrer Parallelkreise umschriebenen geraden Kreiskegel als die umhüllten Flächen betrachtet.

Da endlich einer Rotationsfläche längs jedes Parallelkreises eine Kugel eingeschrieben werden kann, so wird die Rotationsfläche auch als Umhüllungsfläche dieser Kugeln angesehen werden können. In den beiden letzten Fällen sind die Parallelkreise die Charakteristiken.

Im übrigen kann jede wie immer entstandene krumme Fläche auf unendlich viele Arten als Umhüllungsfläche dargestellt werden. Denken wir uns beispielsweise dieser krummen Fläche aus allen Punkten einer willkürlich im Raume gewählten Geraden Kegel umschrieben, so kann man die letzteren als umhüllte Flächen, ihre Berührungskurven als Charakteristiken und die ursprüngliche Fläche als Umhüllungsfläche auffassen.

§ 406.

Ist U irgend eine Umhüllungsfläche, a ein beliebiger Punkt derselben, T die ihm entsprechende Tangentialebene; stellt ferner $\mathsf{C_a}$ die durch a gehende Charakteristik und $\mathsf{F_a}$ diejenige der umhüllten Flächen vor, welche U längs der Kurve $\mathsf{C_a}$ berührt, so ist die Ebene T offenbar auch die Tangentialebene der Fläche $\mathsf{F_a}$ in a, woraus der Satz folgt:

„Die Tangentialebene einer Umhüllungsfläche in einem ihrer Punkte ist zugleich die Berührebene derjenigen umhüllten Fläche, deren Charakteristik durch den genannten Punkt geht.“

§ 407.

Es stelle **U** wieder eine Umhüllungsfläche, F_k irgend eine der umhüllten Flächen und C_k die entsprechende Charakteristik vor.

Der Schnitt der beiden Flächen **U** und F_k mit irgend einer Ebene **E** wird durch zwei Kurven C_u und C_f dargestellt. Ist ferner **a** ein Schnittpunkt der Ebene **E** mit der Charakteristik C_k, so werden durch denselben auch die beiden Kurven C_u und C_f gehen. Nachdem sich aber die Flächen **U** und F_k in **a** berühren, in **a** also eine gemeinschaftliche Berührebene besitzen, so werden sich (§ 263) auch die Kurven C_u und C_f in **a** berühren müssen. Das Gleiche gilt von der Schnittkurve der Ebene **E** mit allen anderen umhüllten Flächen, so dass man den Satz erhält:

„Der ebene Schnitt einer Umhüllungsfläche ist die Enveloppe der ebenen Schnitte aller umhüllten Flächen."

Der vorstehende und der in § 406 aufgestellte Satz sprechen die wesentlichen Eigenschaften jeder wie immer gearteten Umhüllungsfläche aus.

Jede derartige Fläche kann selbstverständlich noch viele anderweitige Eigenschaften besitzen, doch wird sie dieselben nicht ihrem Wesen als Umhüllungsfläche verdanken, sondern es werden die besagten Eigenschaften vielmehr aus den besonderen Eigenschaften der umhüllten Flächen folgen.

Aus diesem Grunde finden die Umhüllungsflächen in der darstellenden Geometrie im allgemeinen weniger Beachtung und ist dies namentlich in der Centralprojektion der Fall, wo die Darstellung einer grösseren Zahl krummer Flächen (Umhüllten) gewöhnlich mit nicht unbedeutenden Schwierigkeiten oder doch mit grösserem Zeitaufwande verbunden ist. Man pflegt daher bloss solche Fälle zu berücksichtigen, in welchen die umhüllten Flächen die einfachsten Formen besitzen, also Kegel, Cylinder, oder höchstens Kugeln sind.

Als Beispiele für diesbezügliche Konstruktionen können jene Aufgaben gelten, welche sich auf die Bestimmung der Konturen von Rotationsflächen und der Berührungskurven auf Rotationsflächen beziehen, bei welchen die letzteren als Umhüllungsflächen von Parallelkreis-Kegeln oder Meridian-Cylindern betrachtet werden.

Aus den angegebenen Gründen wollen wir uns auf die Durchführung der nachstehenden Aufgabe beschränken, da sie genügenden Aufschluss geben wird, wie man in allen ähnlichen Fällen zu verfahren habe.

§ 408.

164. Aufgabe: **Es ist die Berührungskurve einer elliptischen Ringfläche, deren Leitellipse in der Bildebene liegt, mit einem dieser Fläche parallel zu einer gegebenen Geraden umschriebenen Cylinder zu konstruieren.**

Sei $\mathsf{E} = \mathsf{abcd}$ [Fig. 300, Taf. XXIII] die in der Bildebene liegende Leitellipse für die darzustellende Fläche. Die letztere ist die Umhüllungsfläche aller jener Kugeln von einem beliebigen aber unveränderlichen Radius, deren Mittelpunkte auf der Ellipse E liegen; o_1 sei der Mittelpunkt einer solchen Kugel Σ_1 und σ_1 der grösste Kreis, in welchem diese Kugel die Bildebene schneidet.

Vor allem wird es sich um die dieser Kugel entsprechende Charakteristik handeln, zu deren Bestimmung wir durch nachstehende Betrachtung gelangen. Wir nehmen auf der Ellipse E einen beliebigen Punkt o_2 als den Mittelpunkt einer zweiten Lage der umhüllten Kugeln an, d. i. einer Kugel Σ_2, welche denselben Radius wie Σ_1 besitzt. Die beiden Kugeln Σ_1 und Σ_2 schneiden sich in einem Kreise, dessen Ebene ν zur Geraden $\mathsf{o}_1\mathsf{o}_2$ (also auch zur Bildebene) senkrecht steht, und durch den Halbierungspunkt μ der Strecke $\mathsf{o}_1\mathsf{o}_2$ geht.

Denken wir uns nun den Mittelpunkt o_2 von Σ_2 dem Punkte o_1 bis zur Koincidenz genähert, so dass Σ_1 und Σ_2 zwei unmittelbar aufeinander folgende Lagen der umhüllten Kugeln repräsentieren, so übergeht die Gerade $\mathsf{o}_1\mathsf{o}_2$ in die Tangente t_1 und die Gerade ν (d. i. die Bildflächtrace der Ebene des Schnittkreises beider Kugeln) in die Normale P_b^1 der Ellipse E im Punkte o_1.

Hieraus folgt, dass die Charakteristik, welche der Kugel Σ_1 entspricht, der grösste Kreis ist, in welchem die Kugel Σ_1 von jener zur Bildebene senkrechten Ebene $\mathsf{P}_v^1\mathsf{P}_b^1$ geschnitten wird, deren Bildflächtrace P_b^1 durch die Normale der Ellipse E im Kugelmittelpunkte o_1 dargestellt erscheint.

Auf diesem Wege kann man beliebig viele umhüllte Kugeln und deren Charakteristiken bestimmen, und dieselben, wie eben gezeigt werden wird, gleichzeitig zur punktweisen Konstruktion der gesuchten Berührungskurve verwenden.

Ist nämlich v der gegebene gemeinschaftliche Fluchtpunkt der Erzeugenden jenes Cylinders, welcher der Ringfläche umschrieben werden soll, so wird zunächst die diesem Fluchtpunkte v entsprechende Normalenfluchttrace S_v zu ermitteln sein.

Ziehen wir weiter durch o_1 zu S_v die Parallele S_b^1, so ist in $S_v S_b^1$ die zur Richtung der Cylindererzeugenden senkrechte Durchmesserebene der umhüllten Kugel Σ_1 dargestellt. Die Tangentialebenen der Kugel Σ_1 in allen Punkten des grössten Kreises K_1, in welchem Σ_1 von $S_v S_b^1$ geschnitten wird, müssen mithin parallel zu v sein.

Der Kreis K_1 schneidet ferner jenen Kreis, welcher in der vorher genannten Ebene $P_v^1 P_b^1$ liegt und die Charakteristik der Kugel Σ_1 repräsentiert, in zwei Punkten, die auch der Schnittgeraden $v_1 o_1$ der beiden Ebenen $S_v S_b^1$ und $P_v^1 P_b^1$ angehören.

Legt man daher den grössten Kreis K_1 und die Gerade $l_1 = o_1 v_1$ um S_b^1 beziehungsweise nach K_1^0 und l_0^1 um, so erhält man durch Zurückführung der Schnittpunkte m_0^1 und n_0^1 von K_1^0 mit l_0^1 die Bilder m_1 und n_1 der genannten Punkte.

Nachdem die beiden Punkte m_1 und n_1 dem Kreise K_1 sowohl, als auch der Charakteristik angehören, sind die Tangentialebenen der Kugel Σ_1 in denselben einerseits parallel zu den in v verschwindenden Geraden, anderseits aber (Satz, § 406) auch die Berührebenen der Ringfläche in den nämlichen Punkten m_1 und n_1. Hieraus folgt, dass m_1 und n_1 zwei Punkte der gesuchten Berührungskurve sind.

Das gleiche Verfahren, auf andere Lagen der umhüllten Kugeln angewandt, liefert beliebig viele weitere Paare von Punkten der zu konstruierenden Berührungskurve.

XIII. Abschnitt.

Die Schraubenlinie und die geradlinigen Schraubenflächen.

XXV. Kapitel.

Eigenschaften und Konstruktion der Schraubenlinie.

§ 409.

Ist auf der Oberfläche eines geraden Kreiscylinders (Rotationscylinder) eine Kurve derart verzeichnet, dass sie alle Cylindererzeugenden unter demselben Winkel (der übrigens beliebig gross sein kann) schneidet, so nennt man diese Kurve eine *„Schraubenlinie"*. Der besagte Cylinder heisst sodann der Schraubencylinder, und seine Achse wird gleichzeitig auch als *„Achse der Schraubenlinie"* bezeichnet.

Stellen wir uns vor, die Kurve Σ [Fig. 301, Taf. XXIV] sei eine derartige Schraubenlinie; **K** und **K'** mögen zwei Kreisschnitte, **oo'** die Achse und $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$ ... beliebige Erzeugende des zugehörigen Schraubencylinders repräsentieren.

Denken wir uns ferner jenes Stück des Cylinders, welches durch die Kreise **K** und **K'** begrenzt ist, samt dem darauf befindlichen Teile der Schraubenlinie in eine Ebene abgewickelt. Hierbei übergehen die eben genannten Kreislinien $\mathbf{K} = \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\vartheta \ldots \alpha$ und $\mathbf{K'} = \alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\vartheta' \ldots \alpha'$ in die zu einander parallelen Geraden $\alpha_0\beta_0\gamma_0\delta_0\varepsilon_0\vartheta_0 \ldots$ und $\alpha'_0\beta'_0\gamma'_0\delta'_0\varepsilon'_0\vartheta'_0 \ldots$; die Cylindererzeugenden $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, ... $\varepsilon\varepsilon'$ ... in die zu einander parallelen Geraden $\alpha_0\alpha'_0$, $\beta_0\beta'_0$ ... $\varepsilon_0\varepsilon'_0$ ..., und die Schraubenlinie Σ, welche die vorgenannten Erzeugenden beziehungsweise in den Punkten **a**, **b**, **c**, **d**, **e** ... trifft, in die Linie Σ_0, welche die entsprechenden Punkte $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{c}_0$, $\mathbf{d}_0$, $\mathbf{e}_0$ ... in der Abwickelung verbindet.

Der eingangs aufgestellten Definition entsprechend, schneidet die Schraubenlinie Σ die Cylindererzeugenden $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, . . . $\varepsilon\varepsilon'$ in den Punkten **a**, **b**, . . **e** unter einem und demselben Winkel, welchen wir mit φ bezeichnen wollen. Da sich aber die relative Lage eines Kurvenelementes gegen jene Cylindererzeugende, welche dieses Element schneidet, bei der Abwickelung nicht ändert, so wird auch die abgewickelte Schraubenlinie Σ_0 die Geraden $\alpha_0\alpha'_0$, $\beta_0\beta'_0$, . . . $\varepsilon_0\varepsilon'_0$ . . . in den Punkten $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$ . . . $\mathbf{e}_0$ unter dem Winkel φ schneiden, sie muss also notwendig eine gerade Linie sein. Es besteht mithin der Satz:

„Jede Schraubenlinie übergeht bei der Abwickelung ihres Schraubencylinders in eine gerade Linie."

Der Winkel ψ, welchen alle Elemente einer Schraubenlinie mit den zu den Cylindererzeugenden senkrechten Ebenen einschliessen, ist der Komplementwinkel zu dem Winkel φ; derselbe wird als der *„Neigungswinkel"* oder kurz als die *„Neigung"* der Schraubenlinie bezeichnet, während man die trigonometrische Tangente des Winkels ψ die *„Steigung"* der Schraubenlinie zu nennen pflegt.

§ 410.

Aus dem eben bewiesenen Satze kann man leicht weitere, für die Konstruktion der Schraubenlinie wichtige Eigenschaften ableiten.

Bezeichnen wir den Punkt, bei welchem die Schraubenlinie Σ [Fig. 301, Taf. XXIV] beginnt, mit **A**, und jenen Punkt, in welchem sie nach einem einmaligen Gang um den Cylinder wieder die dem Punkte **A** entsprechende Cylindererzeugende trifft, mit **A'**. Den durch **A** gehenden Cylinderkreis **K** pflegt man sodann als den *„Grundkreis"*, den Teil **AabcdeA'** der Schraubenlinie als einen *„Schraubengang"* oder kurz als *„Gang"* und die Strecke **AA'** auf der Cylindererzeugenden als die *„Ganghöhe"* der Schraubenlinie Σ zu bezeichnen.

Wickelt man den Cylinder ab, so übergeht der Grundkreis **K** in die Gerade $\mathbf{A}\mathfrak{J}_0$, deren Länge den vollen Umfang von **K** repräsentiert; der Schraubengang **A** . . . **c** . . . **A'** in die Gerade $\mathbf{A}\mathbf{A}'_0$ und die Cylindererzeugende $\mathbf{AA'} = \mathfrak{J}\mathfrak{J}'$ in die Gerade $\mathfrak{J}_0\mathbf{A}'_0$. Aus dem rechtwinkligen Dreiecke $\mathbf{A}\mathfrak{J}_0\mathbf{A}'_0$ folgt:

$$\frac{\mathfrak{J}_0\mathbf{A}'_0}{\mathbf{A}\mathfrak{J}_0} = \operatorname{tg}\psi,$$

oder, da $\mathfrak{J}_0 A'_0 = AA'$ und $A\mathfrak{J}_0 = 2r\pi$ ist, wenn r den Radius des Grundkreises bezeichnet,

$$\frac{AA'}{2r\pi} = \operatorname{tg}\psi.$$

Das Verhältnis der Ganghöhe zum Umfange des Grundkreises bestimmt sonach die Steigung der Schraubenlinie.

Nehmen wir ferner ein beliebiges Stück cd der Schraubenlinie an. Die durch die Endpunkte c und d gehenden Cylindererzeugenden treffen den Grundkreis K in γ und δ.

Die Differenz h der beiden Strecken $d\mathfrak{J}$ und $c\gamma$ bezeichnen wir als die *„Höhendifferenz“* zweier beliebiger Punkte der Schraubenlinie resp. als die *„Höhe“* des Stückes cd der besagten Kurve.

Nach der Abwickelung des Cylinders übergeht das Kurvenstück cd in die geradlinige Strecke $c_0 d_0$, die Erzeugenden $c\gamma$ und $d\delta$ in die Geraden $c_0\gamma_0$ und $d_0\delta_0$, und der Kreisbogen $\gamma\delta$ in die Strecke $\gamma_0\delta_0$, so dass $h = d\delta - c\gamma = d_0\delta_0 - c_0\gamma_0 = d_0\Delta$ und $\gamma_0\delta_0 = \operatorname{arc}.\gamma\delta$ ist. Man hat dann in dem rechtwinkligen Dreiecke $c_0 d_0 \Delta$:

$$\frac{d_0\Delta}{\Delta c_0} = \frac{h}{\operatorname{arc}.\gamma\delta} = \operatorname{tg}\psi,$$

und daher der Satz:

„Das Verhältnis, in welchem die Höhendifferenz zweier beliebiger Punkte einer Schraubenlinie zu der Länge des zwischen diesen Punkten liegenden Grundkreisbogens steht, ist konstant und gleich der Steigung der Schraubenlinie.“

Stellen mithin h_1 und h_2 die „Höhen“ irgend zweier Stücke ab und cd einer Schraubenlinie, $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ die ihnen entsprechenden Bögen des Grundkreises vor, so ist:

$$\frac{h_1}{\operatorname{arc}.\alpha\beta} = \frac{h_2}{\operatorname{arc}.\gamma\delta} \quad \text{oder} \quad h_1 : h_2 = \operatorname{arc}.\alpha\beta : \operatorname{arc}.\gamma\delta.$$

Sind endlich arc $\gamma\alpha\beta$ und arc $\gamma\delta$ einander gleich, so ist auch $h_1 = h_2$ und folglich besteht der Satz:

„Die Kurvenstücke einer Schraubenlinie, welche gleich langen Bögen des Grundkreises entsprechen, besitzen gleiche Höhen.“

Auf Grund dieser Eigenschaft unterliegt es nunmehr auch keinerlei Schwierigkeit, eine Schraubenlinie punktweise darzustellen.

§ 411.

Nachdem eine Schraubenlinie, resp. deren Elemente mit den Erzeugenden des zugehörigen Cylinders durchaus gleiche Winkel einschliessen, so gilt dasselbe auch von den geradlinigen Verlängerungen dieser Elemente, d. i. von den Tangenten der Schraubenlinie.

Ist also **t** [Fig. 301, Taf. XXIV] die Tangente der Schraubenlinie $\Sigma = \mathbf{Aabc} \ldots \mathbf{A'}$ im Punkte **c**, so schliesst diese Tangente mit der durch **c** gehenden Cylindererzeugenden $\mathbf{c}\gamma$ den nämlichen Winkel φ ein wie die Schraubenlinie, und wird mithin auch mit der Ebene des Grundkreises **K** denjenigen Winkel ψ bilden, welcher die „Neigung der Schraubenlinie" repräsentiert. Es gilt demnach der Satz:

„Sämtliche Tangenten einer Schraubenlinie schneiden die Erzeugenden des Schraubencylinders unter demselben konstanten Winkel wie die Schraubenlinie selbst, und schliessen mit der Ebene des Grundkreises den Winkel ein, welcher die Neigung der Schraubenlinie repräsentiert."

Nachdem die Tangente **t** der Schraubenlinie Σ im Punkte **c** auch den Schraubencylinder in **c** berührt, so liegt **t** notwendig in der der Erzeugenden $\mathbf{c}\gamma$ entsprechenden Cylindertangentialebene. Der Durchstosspunkt $\mathbf{d_c}$ von **t** mit der Ebene des Grundkreises **K** wird mithin in der Trace der besagten Tangentialebene auf der Grundkreisebene, d. i. in der Tangente **T** des Grundkreises im Punkte γ, liegen. Da nach dem vorstehenden Satze der Winkel $\mathbf{cd_c}\gamma$ der Neigung ψ der Schraubenlinie Σ entspricht, so wird:

$$\mathbf{c}\gamma = \gamma\mathbf{d_c} \cdot \text{tang}\,\psi,$$

und da weiter $\mathbf{c}\gamma$ die Höhe des Stückes **Ac** der Schraubenlinie Σ zwischen deren Anfangspunkt **A** auf dem Grundkreise **K** und dem Berührungspunkt **c** der Tangente **t** darstellt, dieses Stück aber auch (Satz 1, § 410) durch

$$\mathbf{c}\gamma = \text{tg} \cdot \psi \cdot \text{arc}\,\mathbf{A}\gamma$$

ausgedrückt werden kann, folgt aus den beiden Gleichungen, dass:

$$\gamma\mathbf{d_c} = \text{arc} \cdot \mathbf{A}\gamma,$$

und hiermit auch der Satz:

„Die Tangente einer Schraubenlinie trifft die Ebene des Grundkreises in einem Punkte, welcher der Tangente des Grundkreises in dem dem Berührungspunkte der Schraubenlinie entsprechenden

Punkte angehört und von dem letzteren Punkte eine Entfernung besitzt, welche demjenigen Bogen des Grundkreises gleich kömmt, welcher dem vom Berührungspunkte mit der erstgenannten Tangente und dem vom Anfangspunkte der Schraubenlinie begrenzten Stücke entspricht.“

Nachdem die centralprojektivische Darstellung der Schraubenlinie an und für sich kein besonderes Interesse bietet, so bringen wir dieselbe in den nachstehenden Problemen in unmittelbare Verbindung mit der Darstellung der geradlinigen Schraubenflächen.

XXVI. Kapitel.

Schraubenflächen.

§ 412.

165. Aufgabe: **Es ist eine aufwickelbare Schraubenfläche, deren Kuspidalschraubenlinie auf einem zur Bildebene senkrechten Cylinder liegt, centralprojektivisch darzustellen, und sind die zu einer gegebenen Geraden parallelen Tangentialebenen dieser Fläche zu konstruieren.**

Sei K [Fig. 302, Taf. XXIV] der in der Bildebene gegebene Grundkreis vom Radius r und $Z = oA$ die Achse jener Schraubenlinie, welche wir als die Kuspidalkurve der developpablen Schraubenfläche voraussetzen.

Um zunächst das centralprojektivische Bild der Schraubenlinie zu konstruieren, teilen wir den Grundkreis K in eine beliebige Anzahl (beispielsweise in zwölf) gleicher Teile, und führen durch die sich ergebenden Teilpunkte α, β, γ, δ, ε, ϑ, $\varkappa$, λ, μ, ν die in A verschwindenden Erzeugenden des Grundkreiscylinders. Ferner denken wir uns die Achse $Z = oA$ um Z in die Bildebene nach Z_0 umgelegt, tragen von o aus gleiche Teile von beliebiger Länge $ob_1^0 = b_1^0c_1^0 = c_1^0d_1^0 = \cdots = m_1^0n_1^0$ so auf, dass $12 \, . \, b_1^0 o = H$ (Steigung) wird, und bestimmen durch entsprechende Zurückführung die Centralprojektionen b_1, c_1, d_1 . . . m_1, n_1 der Teilpunkte.

Mit Hilfe der Teilpunkte auf dem Kreise **K** und jener auf der Achse **Z** kann man nun leicht (Satz 2, § 410) einzelne Punkte der Schraubenlinie konstruieren. Lassen wir zum Zwecke der beabsichtigten Konstruktion die Schraubenlinie bei dem Punkte $\alpha = \mathbf{a}$ in der Bildebene beginnen.

Der Kreisradius $\mathbf{r} = \mathbf{o}\beta$ repräsentiert die Bildflächtrace jener Ebene, welche durch die Achse **Z** und die Cylindererzeugende $\beta\mathbf{A}$ geht. Führt man daher durch $\mathbf{b}_1$ die Parallele $\mathbf{b}_1\mathbf{b}$ zu $\mathbf{o}\beta$, so wird dieselbe als Parallele zur Bildebene die Cylindererzeugende $\beta\mathbf{A}$ in jenem Punkte **b** treffen, der von der Bildebene (also vom Punkte β des Grundkreises) dieselbe Entfernung wie $\mathbf{b}_1$ hat, demnach also eine Entfernung besitzt, deren wahre Grösse durch $\mathbf{b}_1^0\mathbf{o} = \mathbf{h} = \frac{\mathbf{H}}{12}$ gegeben ist.

In gleicher Weise schneidet die zu $\mathbf{o}\gamma$ durch $\mathbf{c}_1$ parallel geführte Gerade die Cylindererzeugende $\gamma\mathbf{A}$ in einem Punkte **c**, dessen Entfernung $\mathbf{c}\gamma$ von der Bildebene in wahrer Grösse gleich $\mathbf{c}_1^0\mathbf{o} = 2\mathbf{h}$ ist. Ebenso finden wir auf den Cylindererzeugenden $\delta\mathbf{A}$, $\varepsilon\mathbf{A}$, $\vartheta\mathbf{A}$, . . . $\nu\mathbf{A}$ die Punkte **d**, **e**, **f**, **k**, **l**, **m**, **n**, . . . deren Entfernungen von der Bildebene beziehungsweise gleich $3\mathbf{h}$, $4\mathbf{h}$, $5\mathbf{h}$ . . . $12\mathbf{h}$ sind; es gehören mithin (Satz 2, § 410) die Punkte **a**, **b**, **c**, **d** . . . **m**, **n** einer Schraubenlinie **C** an.

Die Tangenten dieser Schraubenlinie repräsentieren, wie wir (Kap. XXV) wissen, gleichzeitig die Erzeugenden einer aufwickelbaren Fläche, welche wir als *„aufwickelbare Schraubenfläche“* bezeichnen.

Der Schnitt dieser Fläche mit der Bildebene ist jene Kurve, welche sich als geometrischer Ort der Bildflächdurchstosspunkte aller Erzeugenden ergibt.

Denken wir uns beispielsweise die Tangente der Schraubenlinie **C** im Punkte **e** bestimmt. Da in unserem Falle die Ebene des Grundkreises gleichzeitig die Bildebene ist, so wird (Satz 2, § 411) der Bildflächdurchstosspunkt ε_1 der vorgenannten Tangente in der dem Punkte ε entsprechenden Tangente des Grundkreises **K** liegen, und wird seine Entfernung von ε dem Bogen $\mathbf{a}\varepsilon$ des Kreises **K** gleich sein.

Nachdem das Gleiche für alle anderen Tangenten der Schraubenlinie gilt, so finden wir, dass der geometrische Ort ihrer Bildflächdurchstosspunkte jene Kurve ist, welche sich durch

Abwickelung des Grundkreises K auf seinen Tangenten ergibt, also die bei a beginnende *„Evolvente“* des Grundkreises repräsentiert.

Nehmen wir weiter eine beliebige Erzeugende der Schraubenfläche an, beispielsweise jene, welche die Schraubenlinie C im Punkte c berührt. Diese Tangente liegt in der der Erzeugenden cA oder γA entsprechenden Tangentialebene $e_v e_b$ des Schraubencylinders; ihr Fluchtpunkt φ_1 ist folglich der Schnitt mit der Fluchttrace e_v.

Nachdem aber (Satz 1, § 411) alle Tangenten der Schraubenlinie C, d. i. alle Erzeugenden der developpablen Schraubenfläche mit der Grundkreisebene, hier also mit der Bildebene, gleiche Winkel einschliessen, so wird der geometrische Ort ihrer Fluchtpunkte, d. i. die Fluchtkurve der Schraubenfläche, jener Kreis K_φ sein, der seinen Mittelpunkt im Hauptpunkte A hat und durch φ_1 geht.

Hiermit ist die developpable Schraubenfläche vollständig dargestellt und es erübrigt nur noch die Lösung des zweiten Teils der Aufgabe, d. i. an diese Fläche parallel zu einer Geraden VD die Tangentialebene $T_v T_b$ zu legen.

Die Fluchttrace T_v derselben muss offenbar durch V gehen, und ausserdem (§ 354) die Fluchtkurve K_φ berühren. Der Berührungspunkt v_1 von T_v mit dem Fluchtkreise K_φ ist sodann gleichzeitig der Fluchtpunkt jener Erzeugenden, längs welcher die Schraubenfläche von der Ebene $T_v T_b$ berührt wird.

Zieht man $e'_v = v_1 A$ und führt man weiter parallel zu e'_v die Tangente e'_b des Grundkreises, so ist $e'_v e'_b$ die Cylindertangentialebene, welche die vorgenannte Flächenerzeugende enthält. Der Durchstosspunkt der letzteren ergibt sich mithin im Schnitte ρ_1 von e'_b mit der Evolvente C_b, während die Tangente T_b von C_b in ρ_1, welche (sobald die Kreistangente e'_b richtig gewählt ist), parallel zu T_v sein muss, die Bildflächtrace der gesuchten Tangentialebene darstellt und die Gerade $v_1 \rho_1$ die Berührerzeugende mit der Schraubenfläche repräsentiert.

Die zweite durch V gehende Tangente des Kreises K_φ liefert auf gleiche Weise eine zweite Tangentialebene. Hätte endlich die Schraubenlinie C mehrere Gänge, so würde man offenbar entsprechend jedem Gange zwei derartige Tangentialebenen erhalten.

§ 413.

166. Aufgabe: **An ein Schraubenkonoid, dessen Achse zur Bildebene senkrecht steht, ist parallel mit einer gegebenen Ebene eine Tangentialebene zu legen.**

Denken wir uns eine Schraubenlinie und die Achse derselben als Leitlinien für eine windschiefe Fläche, während die Ebene des Grundkreises **K** [Fig. 303, Taf. XXIV] gleichzeitig als Richtebene angenommen werde, so erhalten wir die als *„Schraubenkonoid"* bezeichnete Regelfläche. Die Achse der Schraubenlinie fällt in diesem Falle mit der Achse des Konoides zusammen.

Nachdem die besagte Achse zur Bildebene senkrecht stehen soll, kann der Grundkreis **K** in der Bildebene selbst gewählt werden. Teilen wir den Grundkreis **K** wieder allenfalls in zwölf gleiche Teile, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, ... $\mu\nu$, $\nu\lambda$, ... $\rho\alpha$ und bestimmen wir auf der Achse $Z = oA$ die voneinander gleich weit abstehenden Punkte b_1, c_1, d_1, e_1, ... n_1, so findet man (wie in der vorhergehenden Aufgabe) die Punkte **a**, **b**, **c**, **d**, ... **n** der Schraubenlinie, wenn beziehungsweise die Geraden bb_1, cc_1, dd_1 ... nn_1 durch die Teilpunkte b_1, c_1 ... n_1 parallel zu den Kreisradien $o\beta$, $o\gamma$, $o\delta$ ... gezogen und mit den Cylindererzeugenden βA, γA, δA ... in **b**, **c**, **d**, ... **m**, **n** zum Schnitte gebracht werden. Verbindet man die letztgenannten Punkte durch eine stetige Kurve **C**, so repräsentiert dieselbe das centralprojektivische Bild der Schraubenlinie.

Die vorbezeichneten Geraden bb_1, cc_1 ... mm_1, nn_1 stellen die Centralprojektionen von zur Bildebene parallelen Geraden dar, welche die Achse $Z = oA$ in den Punkten b_1, c_1 ... n_1 und die Schraubenlinie **C** beziehungsweise in den Punkten **b**, **c**, ... **n** schneiden. Im vorliegenden Falle ist aber die Bildebene identisch mit der Grundkreisebene, also auch mit der Richtebene des Schraubenkonoides; die Erzeugenden des letzteren sind daher bereits durch die Geraden bb_1, cc_1, ... mm_1, nn_1 dargestellt.

An dieses Konoid soll parallel zu einer gegebenen Ebene eine Tangentialebene $T_v^p T_b^p$ geführt werden, deren Fluchttrace T_v^p somit von vornherein gegeben ist.

Nachdem diese Tangentialebene notwendig eine Konoiderzeugende enthalten muss, alle Konoiderzeugenden aber zur Bildebene parallel sind, so wird die besagte Erzeugende insbesondere auch parallel zur Trace T^p_v sein müssen.

Zieht man also den Radius $o\varepsilon$ des Grundkreises K parallel zu T^p_v und durch den Endpunkt ε desselben die Cylindererzeugende εA, so trifft diese die Schraubenlinie C in dem Punkte e. Die Parallele ee_1 durch e zu $o\varepsilon$ oder T^p_v ist somit die gesuchte Erzeugende, durch welche nunmehr die verlangte Tangentialebene $T^p_v T^p_b$ zu führen sein wird.

Wir benützen zu diesem Zwecke die Tangentialebene $P_v P_b$ des Schraubencylinders längs der Erzeugenden εA als Hilfsebene. Die Schnittgerade der Ebene $P_v P_b$ mit der zu bestimmenden Berührebene $T^p_v T^p_b$ geht einerseits durch e und hat anderseits den Schnitt φ' von T^p_v und P_v zum Fluchtpunkt, so dass sie durch $\varphi' e$ dargestellt erscheint. Die durch den (in P_b liegenden) Durchstosspunkt p' von $\varphi' e$ zu T^p_v Parallele liefert sodann die gesuchte Bildflächtrace T^p_b.

Es erübrigt somit nur noch die Bestimmung des Berührungspunktes p der Tangentialebene $T^p_v T^p_b$ auf der vorher festgestellten Erzeugenden ee_1. Zu diesem Behufe kann, wie folgt, vorgegangen resp. geschlossen werden. Die Tangentialebene des Konoides in dem der Achse Z angehörenden Punkte e_1 der Konoiderzeugenden ee_1 ist die durch Z und ee_1 gehende Ebene $T^{e_1}_v T^{e_1}_b$. Die Tangentialebene des Konoides in dem der Schraubenlinie C angehörenden Punkte e der Erzeugenden ee_1 ist jene Ebene, deren Bildflächtrace T^e_b parallel zu ee_1 durch den in P_b liegenden Bildflächdurchstosspunkt e' der Tangente an die Schraubenlinie im Punkte e geht. Die Tangentialebene T^u des Konoides in dem unendlich fernen Punkte u_∞ von ee_1 ist parallel zur Richtebene.

Die vier Tangentialebenen T^p, T^{e_1}, T^e und T^u schneiden die Gerade P_b in den vier Punkten p', e'_1, e' und u'_∞.

Der Wurf, welchen diese vier Ebenen, also auch der Wurf, welchen die vier Punkte p', e'_1, e', u'_∞ bilden, muss (Satz 1, § 344) projektivisch mit dem Wurfe der vier entsprechenden Berührungspunkte p, e_1, e, u_∞ sein. Nachdem sich aber die

unendlich fernen Punkte u_∞ und u'_∞ entsprechen, so sind die beiden Würfe ähnlich, weshalb:

$$\frac{pe}{pe_1} = \frac{p'e'}{p'e'_1}.$$

Überträgt man daher die Strecke ee_1 von e' aus auf T^e_b nach $e'e''_1$, zieht man ferner $e'_1 e''_1$ und führt dann parallel zu $e'_1 e''_1$ die Gerade $p'p''$, so hat man weiter bloss den Punkt p'' zurück nach p auf ee_1 zu übertragen, also $ep = e'p''$ zu machen, um den gesuchten Berührungspunkt p zu erhalten; denn der ausgeführten Konstruktion zufolge ist:

$$\frac{ep}{e_1 p} = \frac{e'p''}{e''_1 p''} = \frac{e'p'}{e'_1 p'}.$$

§ 414.

167. Aufgabe: **Eine windschiefe Schraubenfläche, deren Achse zur Bildebene senkrecht steht, ist centralprojektivisch darzustellen, und sind die Asymptoten irgend eines ebenen Schnittes dieser Fläche zu bestimmen.**

Unter einer windschiefen Schraubenfläche versteht man jene Regelfläche, deren Erzeugenden einerseits eine Schraubenlinie und anderseits deren Achse schneiden, mit der letzteren aber überdies stets einen und denselben Winkel einschliessen.

Auf Grund dieser Definition wird eine derartige Schraubenfläche leicht darstellbar sein. Wir bestimmen nämlich einzelne Punkte a, b, c, d, ... l [Fig. 304, Taf. XXIV] einer Schraubenlinie C, indem wir den in der Bildebene angenommenen Grundkreis K in irgend eine beliebige Anzahl, hier zwölf, gleiche Teile $\alpha\beta = \beta\gamma = \cdots = \mu\nu = \cdots = \rho\alpha$ teilen, auf der Achse Z perspektivisch die gleichen Stücke $ob_1 = b_1 c_1 = c_1 d_1$ ... abschneiden, und dann so wie in den beiden vorhergehenden Fällen verfahren. Ferner bestimmen wir auf der Achse Z eine weitere Reihe von Punkten a_2, b_2, c_2 ... in der Weise, dass oa_2, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$, $d_1 d_2$ ... als die centralprojektivischen Darstellungen einer und derselben Strecke ρ erscheinen, in der Umlegung nach Z_0 also in wahrer Grösse durch:

$$oa^0_2 = b^0_1 b^0_2 = c^0_1 c^0_2 = d^0_1 d^0_2 = \cdots = \sigma\rho$$

festgestellt sind.

Die Geraden aa_2, bb_2, cc_2 . . . repräsentieren sodann die Hypotenusen von den kongruenten Dreiecken aoa_2, bb_1b_2, cc_1c_2 . . ., sind daher gegen die Achse Z, welche die eine Reihe von Katheten enthält, gleich geneigt. Nachdem ferner diese Geraden die Schraubenlinie C sowohl als auch die Achse Z schneiden, so stellen sie bereits die oben verlangten Erzeugenden einer windschiefen Schraubenfläche vor.

Berücksichtigen wir weiter, dass die Achse $Z = oA$ zur Bildebene senkrecht steht, so gelangen wir zu dem Schlusse, dass die Erzeugenden der Schraubenfläche auch mit der Bildebene einen und denselben Winkel einschliessen.

Hieraus folgt aber, dass die Fluchtpunkte der letzteren auf einem Kreise K_φ liegen müssen, welcher den Hauptpunkt A zum Mittelpunkte hat. Besagter Kreis K_φ ist sofort bestimmt, sobald der Fluchtpunkt einer Erzeugenden bekannt ist. Wir brauchen daher bloss durch eine Erzeugende, beispielsweise durch aa_2 und durch die Achse Z die Ebene $e_v e_b$ zu legen, um im Schnitte von e_v und aa_2 den Fluchtpunkt φ_1 von aa_2 zu erhalten, und sodann aus dem Mittelpunkte A durch φ_1 den Kreis K_φ zu zeichnen.

Ist $E_v E_b$ die schneidende Ebene, so repräsentieren die gemeinschaftlichen Punkte V und V_1 von E_v und K_φ offenbar die Bilder der unendlich fernen Punkte des ebenen Schnittes; die Tangenten der Schnittkurve in V resp. V_1 werden daher die verlangten Asymptoten sein.

Der Punkt V ist selbstverständlich der Fluchtpunkt einer bestimmten Erzeugenden g_s der Schraubenfläche. Diese Erzeugende muss notwendig in derjenigen Ebene $e'_v e'_b$ liegen, welche der Fluchtpunkt V mit der Achse $Z = oA$ bestimmt. Besagte Ebene schneidet den Schraubencylinder in einer (richtiger in zwei) Erzeugenden σA, welche ihrerseits wieder die Schraubenlinie C in einem Punkte s trifft. Die Gerade sV ist sodann, wie leicht erkennbar, die gesuchte Erzeugende g_s; ihr Durchstosspunkt δ_s ergibt sich in der Trace $o\sigma = e'_b$.

Die Tangentialebene der Schraubenfläche in dem unendlich fernen Punkte V geht offenbar durch die Erzeugende g_s und berührt die unendlich ferne Kurve der Schraubenfläche in V; ihre Fluchttrace ist somit die Tangente T^s_v von K_φ in V.

Die so erhaltene asymptotische Tangentialebene $T^s_v T^s_b$ schneidet bereits die Ebene $E_v E_b$ in der einen Asymptote

VD = Σ der Schnittkurve; eine zweite Asymptote erhält man in gleicher Weise bei Benützung des zweiten Fluchtpunktes $\mathbf{V_1}$.

Hat die Schraubenlinie, also auch die Schraubenfläche mehrere Gänge, so gibt es in jedem Gange zwei Erzeugenden, welche beziehungsweise in **V** und $\mathbf{V_1}$ verschwinden; jedem Gang entsprechen dann zwei Asymptoten der Schnittkurve. Die letztere kann als der geometrische Ort der Schnittpunkte von $\mathbf{E_v E_b}$ mit den Erzeugenden der Schraubenfläche durch Zuhilfenahme jener Ebenen, welche durch diese Erzeugenden und durch die Achse **Z** gehen, leicht ermittelt werden.

XIV. Abschnitt.

Gegenseitiger Schnitt zweier krummer Flächen.

XXVII. Kapitel.

§ 415.

Der Schnitt zweier Flächen $n$ter und n'ter Ordnung ist stets eine Raumkurve der nn'ten Ordnung, d. h. sie wird von jeder Ebene in nn' (reellen oder imaginären) Punkten getroffen. Die besagte Ebene schneidet nämlich die beiden Flächen (Satz, § 260) in zwei Kurven von den bezüglichen Ordnungen n und n', welche ihrerseits nn' Punkte gemein haben, die gleichzeitig der obgenannten Raumkurve angehören.

Sind nun zwei Flächen F_1 und F_2 im Raume gegeben, so wird die Bestimmung ihrer Schnittkurve im allgemeinen stets auf der Ermittelung einer grösseren Anzahl dieser Punkte beruhen. Nur in den seltensten Fällen gibt es andere, direkte Konstruktionswege. Als Beispiel für die letztere Bestimmungsart kann man allenfalls den Schnitt zweier Kugeln ansehen, welcher bekanntlich ein Kreis ist, dessen Ebene zur Verbindungsgeraden der Kugelmittelpunkte senkrecht steht, seinen Mittelpunkt auf dieser Geraden hat, und mithin durch einen einzigen Punkt vollkommen bestimmt ist.

Das Prinzip, nach welchem einzelne Punkte der Schnittkurve zweier Flächen F_1 und F_2 bestimmt werden, beruht ganz allgemein darauf, dass man eine Reihe von Hilfsflächen anwendet, deren Schnittkurven mit jeder der beiden Flächen F_1 und F_2 sich möglichst leicht und einfach bestimmen lassen; die Punkte, welche zwei solche Schnittkurven, die in einer und derselben Hilfsfläche liegen, gemein haben, gehören aus leicht begreiflichen Gründen stets auch der gesuchten Schnittkurve von F_1 und F_2 an.

Die diesbezüglichen Konstruktionen werden selbstverständlich nur dann als einfach, sicher und bequem konstruierbar bezeichnet werden können, wenn die Schnitte von F_1 und F_2 mit den Hilfsflächen entweder gerade Linien oder Kreise sind. Alle anderen Fälle sind mehr oder weniger zeitraubend und mühselig, da man die Schnittkurven mit den Hilfsflächen selbst wieder punktweise zu konstruieren hat. Um übrigens das Gesagte klarer zu machen, wollen wir einige Beispiele über die Schnittbestimmung zweier Flächen durchführen.

§ 416.

168. Aufgabe: **Es ist die gemeinschaftliche Kurve eines Kegels und eines Cylinders zu bestimmen.**

Setzen wir diesfalls voraus, es sei $E_v^1 E_b^1$ [Fig. 305, Taf. XXIV] die Ebene der Leitkurve des Kegels, K_1 die Projektion dieser Leitkurve und S der auf dem Träger $\delta\varphi$ gegebene Kegelscheitel; ferner sei K_2 die in der Ebene $E_v^2 E_b^2$ gegebene Leitkurve des Cylinders, dessen Erzeugenden wir parallel zur Bildebene und überdies speziell auch parallel zu den Tracen $E_v^1 E_b^1$ wählen wollen.

Nachdem durch jeden Punkt der zu bestimmenden Schnittkurve sowohl eine Kegelerzeugende, als auch eine Cylindererzeugende geht, so werden wir diesfalls offenbar zur Konstruktion des gegenseitigen Schnittes als Hilfsflächen „Ebenen“ und zwar solche Ebenen verwenden, welche beide Flächen gleichzeitig nach Erzeugenden schneiden. Dies sind bekanntlich jene Ebenen, welche durch den Kegelscheitel S gehen und nebstbei zu den Cylindererzeugenden parallel sind, also solche Ebenen, welche die durch den Kegelscheitel S zu den Cylindererzeugenden parallel geführte Gerade g enthalten.

Bestimmen wir zunächst den Schnittpunkt Δ der genannten Geraden g mit der Ebene $E_v^2 E_b^2$, so wird eine beliebige durch Δ geführte Gerade σ_2 stets den Schnitt (Trace der schneidenden Hilfsebene h auf der Ebene E_2 der Leitkurve K_2) der Ebene $E_v^2 E_b^2$ mit einer durch $S\Delta = g$ gelegten Hilfsebene h repräsentieren; diese Gerade σ_2 wird daher auch die Leitkurve K_2 im allgemeinen in zwei (oder mehreren) Punkten a_2 und b_2 treffen, durch welche jene Cylindererzeugenden g_a^2, g_b^2 gehen, welche der obbezeichneten Hilfsebene h angehören.

Die Gerade σ_2 muss selbstverständlich auch die gemeinsame Schnittgerade **vd** der beiden Ebenen $E^1_v E^1_b$ und $E^2_v E^2_b$ der Leitkurven K_1 und K_2 in einem Punkte α_1 treffen. Führt man nun durch α_1 eine Parallele σ_1 zu $S\Delta = g$, so stellt dieselbe offenbar bereits die Schnittgerade σ_1 der Ebene $E^1_v E^1_b$ mit der Hilfsebene **h** dar. Die Gerade σ_1 schneidet die Leitkurve K_1 des Kegels, welche in $E^1_v E^1_b$ liegt, in zwei Punkten a_1 und b_1, während der Schnitt der Ebene **h** mit dem Kegel selbst in den Erzeugenden Sa_1 und Sb_1 erfolgt.

Die Kegelerzeugenden g^1_a und g^1_b, welche durch die Schnittpunkte a_1 und b_1 von σ_1 mit der Leitkurve K_1 gehen und ebenso wie die Cylindererzeugenden g^2_a und g^2_b der Hilfsebene **h** angehören, treffen sich mit den letzteren, d. i. mit g^2_a, g^2_b, in den Punkten 1, 2, 3 und 4, die, auf Grundlage des Vorausgeschickten, Punkte des zu bestimmenden Schnittes liefern.

Andert man die Lage der durch Δ gehenden Geraden σ_2, so wird selbstverständlich auch die Lage der Hilfsebene **h** eine entsprechende Änderung erfahren, und wir erhalten durch den hiermit angedeuteten Vorgang in gleicher Weise stets neue Punkte des gesuchten Schnittes der beiden Flächen F_1 und F_2.

Um anderseits Punkte des gegenseitigen Schnittes von F_1 und F_2 zu bestimmen, welche bestimmten Kegelerzeugenden, allenfalls der Konturerzeugenden εS, angehören, wird man bloss durch ε die Trace σ'_1 der schneidenden Hilfsebene **h'** auf der Ebene $E^1_v E^1_h$ der Leitkurve K_1 parallel zu $g = S\Delta$ zu führen, deren Schnittpunkt β mit **vd** festzustellen und β mit Δ zu verbinden haben, um die Trace σ'_2 der Hilfsebene **h'** auf $E^2_v E^2_b$ und im Schnitte dieser letzteren mit K_2 die Punkte a'_2 und b'_2 zu erhalten, durch welche jene Cylindererzeugenden zu führen sind, welche mit $S\varepsilon$ zum Schnitte gebracht, den Ein- beziehungsweise Austrittspunkt der Kegelerzeugenden $S\varepsilon$ bestimmen.

Wie zu ersehen, ist die hier benützte Methode mit dem in § 250, Aufgabe 91, zur Geltung gebrachten Verfahren (Bestimmung der Durchdringung einer Pyramide mit einem Prisma) identisch. Ebenso könnte auch die volle Übereinstimmung in den Bestimmungsweisen der Schnittbestimmung zweier Kegel oder zweier Cylinder mit den in § 249 und § 251 besprochenen Verfahrungsarten nachgewiesen werden. Im ersteren Falle wird man nämlich auch hier Hilfsebenen wählen, welche die beiden

Kegelscheitel enthalten, im zweiten Falle dagegen wieder solche Hilfsebenen benützen, welche zu den Erzeugenden beider Cylinder parallel sind.

§ 417.

169. Aufgabe: **Es ist der Schnitt einer Kegelfläche mit einem windschiefen Hyperboloide zu bestimmen.**

Sei **L** [Fig. 306, Taf. XXIV] die in der Bildebene liegende Leitkurve des Kegels und **S** der auf dem Träger $\delta\varphi$ gegebene Kegelscheitel. Das Hyperboloid sei durch zwei projektivische Reihen auf den sich kreuzenden Trägern d_1v_1 und d_2v_2 gegeben. Die Reihen selbst sind durch drei Paare entsprechender Punkte a_1, a_2; b_1, b_2 und c_1, c_2 bestimmt.

Die verlangte Schnittkurve kann offenbar als der geometrische Ort der Schnittpunkte des Kegels mit allen Erzeugenden a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 ... des Hyperboloides erhalten werden. Man wird zu diesem Zwecke durch die Hyperboloid-Erzeugenden bloss solche Hilfsebenen zu legen haben, welche auch den Kegel nach den einfachsten Formen schneiden, also Hilfsebenen wählen, welche den Kegelscheitel **S** enthalten. Hierbei dürfte überdies noch der nachstehende einfache Weg mit Vorteil eingeschlagen werden.

Legen wir durch **S** und durch d_1v_1 beziehungsweise d_2v_2 die Ebenen $h_v^1h_b^1$ und $h_v^2h_b^2$ und projizieren von **S** aus die beiden projektivischen Reihen $a_1b_1c_1$ ... und $a_2b_2c_2$ ... auf die Bildebene, so erhält man daselbst ebenfalls zwei projektivische Reihen $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ ... und $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ ..., deren Träger die bezüglichen Bildflächtracen h_b^1 und h_b^2 sind.

Die beiden Reihen $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ ... und $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ ... können auf bekannte Weise (§ 113) vervollständigt werden. Durch Zurückprojizieren dieser vervollständigten Reihen von **S** aus wird offenbar auch die Vervollständigung der Reihen $a_1b_1c_1$ ... und $a_2b_2c_2$ ... leicht ermöglicht werden.

Nehmen wir nun irgend zwei entsprechende Punkte, beispielsweise a_1 und a_2 an. Die Verbindungsgerade a_1a_2 ist eine Erzeugende des Hyperboloides. Die der Geraden a_1a_2 in der Bildebene entsprechende Gerade $\alpha_1\alpha_2$ repräsentiert die Bildflächtrace der durch a_1a_2 und durch **S** gelegten Hilfsebene, während die durch die Schnittpunkte 1 und 2 von $\alpha_1\alpha_2$ mit **L** gehenden Kegelerzeugenden **S**1 und **S**2 der Hilfsebene Sa_1a_2 angehören.

Die Punkte I und II, in welchen die Hyperboloid-Erzeugende $a_1 a_2$ die Kegelerzeugenden $1S$ und $2S$ trifft, sind bereits Punkte der zu suchenden Schnittkurve.

Führt man die gleiche Konstruktion für andere Paare entsprechender Punkte, b_1, b_2; c_1, c_2; d_1, d_2; ... der beiden Reihen durch, so können beliebig viele Punkte der Schnittkurve bestimmt werden.

§ 418.

170. Aufgabe: **Es ist die Schnittkurve zweier Rotationsflächen, deren Achsen sich in einem Punkte schneiden, zu konstruieren.**

Um die Konstruktionen möglichst einfach zu gestalten, wollen wir voraussetzen, dass die Ebene der sich schneidenden Rotationsachsen Z_1 und Z_2 [Fig. 307, Taf. XXV] die Bildebene selbst sei. Der gemeinschaftliche Punkt beider Achsen sei s; M_1 und M_2 seien die in der Bildebene liegenden Meridiankurven der beiden Flächen.

Das vorstehende Problem bietet ein Beispiel einer Schnittbestimmung bei welcher die Hilfsflächen nicht so wie in den vorher besprochenen Fällen, ebene Flächen sind. Diesfalls kann man nämlich von dem Umstande Gebrauch machen, dass eine Kugel, deren Mittelpunkt auf der Achse einer Rotationsfläche liegt, diese letztere in einem oder in mehreren Parallelkreisen schneidet.

Wählt man also im vorliegenden Falle den Schnittpunkt s von Z_1 und Z_2 als Mittelpunkt einer Hilfskugel C, welche die Bildebene in dem grössten Kreise γ schneidet, so wird diese Kugel beide Rotationsflächen in Parallelkreisen treffen.

Ist beispielsweise α_1 ein gemeinschaftlicher Punkt von γ und M_1, so wird der durch α_1 gehende und in der durch α_1 senkrecht zu Z_1 geführten Ebene $e_v^1 e_b^{\alpha_1}$ liegende Parallelkreis K_1 der Kugel C und der Rotationsfläche (Z_1, M_1) gemeinschaftlich sein.

Stellt ferner α_2 den Schnittpunkt von γ und M_2 vor und führt man durch α_2 die zu Z_2 senkrechte Ebene $e_v^2 e_b^{\alpha_2}$, so ist der in derselben liegende Parallelkreis K_2 der Rotationsfläche (Z_2, M_2) auch ein Kreis der Hilfskugel C.

Die beiden Kreise K_1 und K_2 müssen sich nun, da sie der nämlichen Kugel C angehören, notwendig in zwei Punkten schnei-

den, welche einerseits der Schnittgeraden $d_\alpha A = s_\alpha$ der beiden Ebenen $e_v^1 e_b^{\alpha_1}$ und $e_v^2 e_b^{\alpha_2}$, anderseits aber auch der gesuchten Schnittkurve angehören. Die besagten Punkte erhält man, indem man den Kreis K_1 sowohl, als auch die Gerade s_α um $e_b^{\alpha_1}$ beziehungsweise nach K_1^0 und s_α^0 umlegt, und die gemeinschaftlichen Punkte a_1^0 und b_1^0 nach a_1 und b_1 zurückführt.

Ändert man den Radius der Hilfskugel C, so kann man durch Wiederholung der erläuterten Konstruktion beliebig viele Paare von Punkten, welche der zu bestimmenden Schnittkurve angehören, ermitteln.

Sind die beiden Drehachsen Z_1 und Z_2 insbesondere parallel, so werden beide Flächen von den zu Z_1 und Z_2 senkrechten Ebenen gleichzeitig in Kreisen geschnitten, welche wieder Paare von Schnittpunkten beider Flächen liefern. Haben jedoch die Rotationsachsen keinen Punkt gemein, so ist die Schnittbestimmung eine höchst mühsame, indem man, selbst dann, wenn als Hilfsebenen die Parallelkreisebenen der einen Fläche gewählt würden, dennoch die Schnittkurven dieser Ebenen mit der zweiten Fläche (§ 137 oder § 138) punktweise bestimmt werden müssten.

Die angeführten Beispiele dürften genügen, um zu zeigen, wie in gewissen Fällen die Schnittkurve zweier Flächen bestimmt werden kann, und wie in ähnlichen Fällen analoge Methoden zu finden wären. Wesentlich bleibt hierbei immer, solche Hilfsflächen zu wählen, welche die beiden zum Schnitte zu bringenden Flächen in möglichst einfach zu bestimmenden Kurven schneiden.

XV. Abschnitt.

Konstruktion der Schatten.

XXVIII. Kapitel.

§ 419.

Um die Anschaulichkeit eines durch irgend eine Projektion dargestellten räumlichen Gebildes oder Objektes zu erhöhen, berücksichtigt man die sichtbaren Wirkungen, welche eine beliebige Lichtquelle auf dieses Objekt und seine Umgebung (d. i. andere Objekte, die Bildebene, u. s. w.) ausübt. Die graphische Darstellung dieser Lichtwirkungen ist Gegenstand der *„Schattenlehre.“*

Vom geometrischen Standpunkte unterscheidet man eine in unendlicher Entfernung befindliche Lichtquelle von einer im Endlichen liegenden, und bezeichnet die Beleuchtung im ersten Falle als *„natürliche Beleuchtung“* (die Sonne kann für beleuchtete kleinere Objekte nahezu als unendlich ferne liegend betrachtet werden) im zweiten Falle als *„künstliche Beleuchtung.“*

Was die Art der Lichtwirkung betrifft, so ist sie in beiden Fällen eine zweifache.

Jeder Körper zeigt nämlich, wenn beleuchtet, an verschiedenen Stellen eine verschiedene Helligkeit, welche von der Lage (Neigung) dieser Stellen resp. der Flächenelemente des Körpers gegen die Lichtquelle, und bei „künstlicher Beleuchtung“ auch von ihrer Entfernung von der Lichtquelle abhängig ist.

Auf jedem Körper gibt es gewisse Linien, die *„Isophoten“* von welchen jede einen geometrischen Ort wirklich gleich stark beleuchteter Punkte repräsentiert, und weiter existiert eine andere Schar von Linien, die *„Isophengen“*, welche geometrische Orte solcher Punkte auf dem Körper resp. auf der Fläche vor-

stellen, die einem in das Projektionscentrum verlegten Auge scheinbar gleich hell erscheinen.

In der centralen Projektion ist die Darstellung solcher Linien umständlich, langwierig und teilweise auch mit Schwierigkeiten verbunden. Nachdem diese letzteren, so wie der zur Auffindung dieser Linien erforderliche Zeitaufwand mit den hierdurch erzielten Resultaten nicht im Einklange stehen, wollen wir hier von der Konstruktion, beziehungsweise Darstellung derselben gänzlich absehen.

Die zweite Art der Lichtwirkung besteht darin, dass gewisse Stellen eines sonst beleuchteten Objektes oder Körpers deshalb dunkel erscheinen, weil einzelne Teile dieses Körpers selbst oder auch andere Objekte den Zutritt der Lichtstrahlen zu jenen Stellen hindern. Derartige dunkle Stellen werden als *„Schatten“* bezeichnet.

Fällt hierbei die Umgrenzung des Schattens mit der Umgrenzung jenes Körper- oder Flächenteiles, welcher diesen Schatten hervorruft, direkt zusammen, so pflegt man denselben als *„Selbstschatten“* zu bezeichnen; ist dies nicht der Fall, dann wird er als *„Schlagschatten“* bezeichnet.

Die Bestimmung solcher Selbst- und Schlagschatten wollen wir an einigen Beispielen zu erläutern suchen. Es wird sich hierbei vor allem darum handeln, die geometrische Grundlage für derartige Konstruktionen festzustellen.

Die Lichtquelle, einerlei ob dieselbe in endlicher oder unendlicher Entfernung liegen mag, wollen wir als Punkt voraussetzen.

Wird irgend ein Punkt **a**, den man als materiell voraussetzt, von einer Lichtquelle **L** beleuchtet, so wird der durch denselben gehende Lichtstrahl **La** von ihm aufgefangen. Jeder Punkt auf der Verlängerung von **La** (über **a** hinaus) befindet sich demnach im Schatten. Der Schlagschatten des Punktes **a** auf irgend eine Fläche wird mithin der Schnittpunkt der letzteren mit der Geraden (Lichtstrahl) **La** sein.

Nehmen wir ferner ein beliebiges Objekt **G** im Raume an. Von einer Lichtquelle **L** gehen Lichtstrahlen nach allen Punkten dieses Objektes **G**, welche als „Lichtstrahlen“ in diesen Punkten aufhören, so dass alle Punkte auf ihren Verlängerungen im Schatten liegen.

Ist das Objekt **G** stetig von Punkten erfüllt, so bilden auch die von der Lichtquelle **L** nach diesen Punkten führenden Lichtstrahlen im allgemeinen ein stetiges Strahlenbündel und

dieses wird von jener Strahlenfläche (Pyramide oder Kegel, wenn **L** im Endlichen liegt; beziehungsweise Prisma oder Cylinder, wenn **L** unendlich ferne ist) begrenzt, welche dem Objekte von **L** aus umschrieben werden kann.

Die Berührungskurve des Objektes mit der umschriebenen Strahlenfläche ist sodann die *„Selbstschattenlinie“*, *„Selbstschattengrenze“* oder die *„Trennungslinie“* zwischen Licht und Schatten auf dem Objekte, während der Schnitt der vorgenannten Strahlenfläche mit irgend einer Fläche die Umgrenzung des *„Schlagschattens“* bildet, welchen das Objekt **G** auf diese Fläche wirft.

Hieraus ist zu ersehen, dass „Selbstschatten“ und „Schlagschatten“ eines Gebildes im Raume sich rein geometrisch höchst einfach deuten lassen, und sind wir auf Grund dessen nunmehr auch im Stande diesbezügliche Konstruktionen ohne jedwede Schwierigkeit durchzuführen.

§ 420.

171. Aufgabe: **Unter Voraussetzung parallelstrahliger Beleuchtung ist der Schlagschatten eines Dreieckes und eines Parallelogrammes, dessen eine Seite in der Bildebene liegt, auf die Bildebene, sowie der Schatten des Dreieckes auf das Parallelogramm zu konstruieren.**

Sei **V** [Fig. 308, Taf. XXV] das Bild der unendlich fernen Lichtquelle, oder mit anderen Worten: der gemeinschaftliche Fluchtpunkt der Lichtstrahlen; ferner seien **abc** das in der Ebene $e_v e_b$ gegebene Dreieck und **ABCD** das in der Ebene $E_v E_b$ gegebene Parallelogramm, dessen eine Seite **AB**, der Voraussetzung gemäss, in der Bildebene, diesfalls also in der Bildflächtrace E_b liegt.

Der Schatten des Dreieckes **abc** auf die Bildebene wird wieder ein Dreieck sein. Nach den eben gepflogenen Auseinandersetzungen wird sich derselbe als Schnitt der Bildebene mit jenem Prisma ergeben, dessen Kanten den Fluchtpunkt **V** besitzen und beziehungsweise durch **a**, **b** und **c** gehen.

Legt man durch den Träger $\delta\varphi$ der Dreieckseite **ab** parallel zu **V** (d. h. parallel zu allen in **V** verschwindenden Geraden) die Seitenebene $h_v h_b = abV$ des Prismas, und bestimmt die Schnittpunkte a_s und b_s von h_b mit den Strahlen (Kanten) **aV** und **bV**, so repräsentiert $a_s b_s$ bereits die eine Seite jenes Dreieckes, in welchem das Lichtprisma **V(abc)** die Bildebene schneidet. Die

beiden anderen Seiten erhält man als die Verbindungsgeraden der Punkte a_s und b_s mit den bezüglichen Durchstosspunkten δ_2 und δ_1 der Dreieckseiten **ac** und **bc**; der Schnittpunkt c_s von $a_s\delta_2$ und $b_s\delta_1$ vervollständigt als dritter Eckpunkt das Dreieck $a_s b_s c_s$, welches bereits den Schatten des Dreieckes **abc** auf der Bildebene darstellt.

In gleicher Weise wird sich auch der Schatten des Parallelogrammes **ABCD** auf die Bildebene, als Schnitt der letzteren mit dem Prisma **V(ABCD)** ergeben. Besager Schnitt wird hier selbstverständlich ein Parallelogramm sein, dessen eine Seite diesfalls offenbar mit **AB** zusammenfällt.

Die den Seiten **AC** und **BD** entsprechenden Schatten AC_s und BD_s sind die Bildflächtracen der Seitenebenen **ACV** und **BDV** des Lichtprismas, ergeben sich mithin als die beziehungsweise durch **A** und **B** zu der Fluchttrace $V\varphi'$ (φ' Fluchtpunkt von **AC** und **BD**) parallel gezogenen Geraden, während die Punkte C_s und D_s auf denselben mittels der Strahlen **CV** und **DV** erhalten werden, so dass ABC_sD_s den Schlagschatten des Parallelogrammes **ABCD** auf die Bildebene repräsentiert.

Es erübrigt jetzt noch, den Schlagschatten des Dreieckes **abc** auf das Parallelogramm **ABCD** zu ermitteln.

Da die Schatten der beiden Gebilde auf eine und dieselbe dritte Fläche bezogen sich gegenseitig teilweise decken, so hat man in diesem Umstande ein Merkmal, dass der Schatten des einen (vorstehenden) Gebildes notwendig von dem zweiten (rückstehenden) aufgefangen werden muss, bevor er auf die dritte Fläche (hier Bildebene) gelangen kann.

Der besagte Schatten kann erhalten werden, indem man das dem Dreiecke **abc** entsprechende Lichtprisma **V(abc)** mit der Ebene $E_v E_b$ des Parallelogrammes zum Schnitte bringt. Der innerhalb der Begrenzung des Parallelogrammes **ABCD** liegende Teil der Schnittfigur repräsentiert sodann den verlangten Schlagschatten.

Sind jedoch, wie im vorliegenden Falle, die Schatten des Dreieckes und des Parallelogrammes auf eine und dieselbe Fläche (hier die Bildebene) bereits konstruiert, so kann der Schatten des Dreieckes auf das Parallelogramm oder umgekehrt auf eine noch einfachere Weise, welche man als das *„Zurückführen“* der Lichtstrahlen bezeichnet, bestimmt werden.

Das hierbei zur Verwendung gelangende Prinzip ist folgendes: Decken sich die Schlagschatten, welche irgend zwei Punkte

im Raume auf eine und dieselbe Fläche werfen, so müssen diese Punkte offenbar auf demselben Lichtstrahle liegen; der von der Lichtquelle entferntere Punkt liegt mithin bereits im Schlagschatten des der Lichtquelle näher gelegenen Punktes. In dem vorstehenden Falle decken sich nun in der That die beiden Schlagschatten $a_s b_s c_s$ und $ABC_s D_s$ teilweise, woraus folgt, dass ein Teil des Dreieckes abc wirklich einen Schlagschatten auf das Parallelogramm werfen wird.

Die beiden Geraden $b_s c_s$ und $C_s D_s$ schneiden sich in einem Punkte m_s. Führen wir den Strahl Vm_s, so trifft derselbe die Geraden bc und CD beziehungsweise in m und in m'_s. Man erkennt sofort, dass, weil m und m'_s den gemeinschaftlichen Schlagschatten m_s auf der Bildebene besitzen, m'_s gleichzeitig den Schlagschatten von m auf die Fläche des Parallelogrammes vorstellt.

In gleicher Weise ist der Schnittpunkt n_s von $a_s b_s$ und $C_s D_s$ der gemeinsame Schlagschatten jener Punkte n und n'_s in welchen der (zurückgeführte) Lichtstrahl $n_s V$ die Geraden ab resp. CD schneidet; es repräsentiert mithin n'_s den Schlagschatten von n auf die Parallelogrammfläche.

Ferner ist der Schnittpunkt r'_s von $a_s b_s$ und AB der Schatten eines gewissen Punktes r von ab auf die Bildebene und gleichzeitig auf die Ebene $E_v E_b$ des Parallelogrammes; die Gerade $r'_s n_s$ stellt mithin die Schlagschatten von ab auf das Parallelogramm dar. Weiter trifft die Verlängerung von $b_s c_s$ die Bildflächtrace E_b in einem Punkte $\mathfrak{J}_s$, welcher den Schlagschatten eines Punktes $\mathfrak{J}$ der verlängerten Geraden bc auf die Bildebene sowohl als auch gleichzeitig auf die Ebene $E_v E_b$ repräsentiert. Man erhält sonach den Schlagschatten der Dreieckseite bc auf die Parallelogrammebene $E_v E_b$ in der Geraden $\mathfrak{J}_s m'_s$, und auf dieser letzteren den Schlagschatten, welchen der Punkt c auf die Parallelogrammfläche wirft, im Schnitte c'_s mit dem zurückgeführten Lichtstrahle $c_s V$.

Schliesslich ist die Gerade, welche c'_s mit dem Schnittpunkte p'_s von $a_s c_s$ und AB verbindet, der Schlagschatten der Dreieckseite ac auf das in $E_b E_v$ gegebene Parallelogramm $ABCD$.

Es erscheint mithin der Schlagschatten, welchen das Dreieck abc auf das Parallelogramm wirft, durch das Polygon $p'_s c'_s m'_s n'_s r'_s$ dargestellt.

§ 421.

172. Aufgabe: **Ein Oktaeder, welches mit einer Achse senkrecht zur Bildebene steht und mit einem Eckpunkte auf derselben aufruht, sowie ferner eine gerade Linie sind gegeben; es soll der Schlagschatten beider auf die Bildebene, sowie der Schlagschatten der Geraden auf das Oktaeder ermittelt werden.**

Die zur Bildebene senkrechte Gerade **Ad** [Fig. 309, Taf. XXV] stelle die eine Achse des Oktaeders dar. Gemäss der in der vorliegenden Aufgabe gestellten Forderung ist der Durchstosspunkt **d** derselben gleichzeitig der eine Eckpunkt des Oktaeders. Der andere Endpunkt der Achse **Ad** sei **c**; der centralprojektivische Halbierungspunkt **o** der Strecke **cd** ist selbstverständlich der Mittelpunkt des Oktaeders, durch welchen die beiden anderen Oktaederachsen **ab** und **ef** gehen. Nachdem diese Achsen zur Bildebene parallel sind, so sind ihre Bilder durch zwei beliebige aufeinander senkrecht stehende und durch **o** gehende Geraden **ab** und **ef** dargestellt; es erübrigt somit nur noch die centralprojektivische Darstellung ihrer Endpunkte **a**, **b**, **c** und **f**.

Die zur Bildebene senkrechte Ebene $e_v e_b$, welche durch die Achsen **ab** und **cd** geht (deren Tracen mithin zu **ab** parallel sind), schneidet das Oktaeder in einem Quadrate, dessen Diagonalen eben die beiden Achsen **ab** und **cd** sind. Nach der Umlegung um e_b erscheint **cd** in $c_0 d$, während sich die andere Achse als die durch den Halbierungspunkt o_0 von $c_0 d$ parallel zu e_b gezogene Gerade darstellt. Auf derselben ergeben sich die umgelegten Eckpunkte a_0 und b_0 einfach durch Übertragung der Strecken $a_0 o_0 = b_0 o_0 = c_0 o_0 = d o_0$; durch Zurückführung erhält man deren Projektionen **a** und **b**. Schneidet man weiter $eo = fo = ao = bo$ ab, so erhält man in **e** und **f** die Endpunkte der dritten Achse. Die vier Kanten **ae**, **eb**, **bf** und **fa** des Oktaeders bilden ein zur Bildebene paralleles Quadrat. Die Verbindungsgeraden seiner Eckpunkte mit den Punkten **c** und **d** liefern die übrigen Kanten des Oktaeders.

Ist nun **V** der Fluchtpunkt der Lichtstrahlen, und legt man parallel zu **V** durch die Achse **Ad** die Hilfsebene $H_v H_b$, so liegen in der Bildflächtrace H_b derselben die Bildflächdurchstosspunkte **d**, o_s, c_s der durch **d**, **o** und **c** gehenden Lichtstrahlen **Vd**, **Vo**, **Vc**;

es sind also d, o_s und c_s bereits die Schlagschatten der genannten Punkte auf die Bildebene (d, als Punkt der Bildebene, fällt mit seinem Schatten unmittelbar zusammen).

Um die Schlagschatten der übrigen vier Oktaederecken a, b, e, f zu finden, haben wir zu berücksichtigen, dass dieselben als Durchstosspunkte der Bildebene mit den parallel zu V durch a, b, e und f geführten Strahlen erhalten werden, oder mit anderen Worten, dass der Schlagschatten des zur Bildebene parallelen Quadrates $aebf$ auf die Bildebene wieder ein Quadrat $a_s e_s b_s f_s$ sein muss, welches mit $aebf$ parallel und kongruent ist (dessen Diagonalen also $c_0 d = a_0 b_0$ sein müssen). Man hat daher bloss $a_s b_s$ und $e_s f_s$ durch o_s parallel zu ab resp. ef zu ziehen, und $a_s o_s = b_s o_s = e_s o_s = f_s o_s = c_0 o$ zu machen.

Hiernach erhält man in $a_s e_s$, $e_s b_s$, $b_s f_s$, $f_s a_s$, $c_s a_s$, $c_s b_s$, $c_s e_s$, $c_s f_s$, $d a_s$, $d b_s$, $d e_s$ und $d f_s$ die Schlagschatten der Oktaederkanten; das Polygon $d a_s e_s c_s b_s f_s d$ wird, nachdem es die äusserste Umgrenzung der Schlagschatten aller auf dem Oktaeder liegenden Punkte ist, den Schlagschatten des Oktaeders vorstellen. (In Fig. 309, Taf. XXV, fallen zufällig die Punkte d, a_s und e_s, sowie auch die Punkte c_s, b_s und f_s in eine Gerade.)

Das Schattenpolygon $d a_s e_s c_s b_s f_s d$ kann gleichzeitig als der Schlagschatten des Kantenpolygons $daecfbd$ aufgefasst werden. Dieses Polygon trennt daher das Oktaeder in einen beleuchteten und einen im Selbstschatten liegenden Teil. Wie dem vorher bemerkten Umstande, dass d, a_s und e_s, sowie auch c_s, b_s und f_s in einer Geraden liegen, leicht zu entnehmen, liegen die Seitendreiecke dae und cbf parallel zu den Lichtstrahlen, also ebenfalls im Selbstschatten

Der Schlagschatten L_s der gegebenen Geraden $dv = L$ auf die Bildebene ergibt sich als die Bildflächtrace h_b der durch dv parallel zu V gelegten Lichtebene $h_v h_b$.

Der Schatten L_s auf die Bildebene trifft nun die Schlagschatten $e_s c_s$, $a_s c_s$, $f_s c_s$ und $b_s f_s$ der Oktaederkanten ec, ac, fc und bf in den bezüglichen Punkten m_s, n_s, p_s und r_s. Führt man diese Punkte mittels der durch dieselben gehenden Lichtstrahlen in die genannten Oktaederkanten nach $m_s^{\prime}$, $n_s^{\prime}$, $p_s^{\prime}$ und $r_s^{\prime}$ zurück, so repräsentieren (wie aus den in der vorhergehenden Aufgabe angestellten Betrachtungen bekannt) $m_s^{\prime}$, $n_s^{\prime}$, $p_s^{\prime}$ und $r_s^{\prime}$ die Schlagschatten gewisser Punkte der Geraden L auf das Oktaeder.

Die gebrochene Linie $m'_s n'_s p'_s r'_s$ stellt daher den Schlagschatten der Geraden L auf das Oktaeder vor. Hierbei ist $p'_s r'_s$ als parallel zu den Lichtstrahlen und auf einer zu den Lichtstrahlen parallelen, also im Selbstschatten befindlichen Fläche cbf liegend, nicht als eigentlicher Schatten zu betrachten.

§ 422.

173. Aufgabe: **Auf einer zur Bildebene senkrechten Ebene ist ein nicht geschlossener Linienzug als Basis eines Prisma mit zur Bildebene parallelen Kanten gegeben; es sollen, centrale Beleuchtung vorausgesetzt, alle vorkommenden Schlagschatten bestimmt werden.**

Es stelle $e_v e_b$ [Fig. 310, Taf. XXV] die zur Bildebene senkrechte Basisebene des Prisma vor. Die Basis sei durch ihr Bild $abcde$, welches einen bei a und e abbrechenden, also offenen Linienzug vorstellt, gegeben.

Nachdem die Prismenkanten zur Bildebene parallel sein sollen, werden auch ihre Bilder aa_1, $bb_1 \ldots cc_1$ untereinander parallel erscheinen. Das Prisma denken wir uns durch eine mit $abcde$ parallele obere Basis $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$ abgeschlossen. Da hierbei je zwei entsprechende Kanten, wie ab und $a_1 b_1$ parallel sind, also einen gemeinschaftlichen Fluchtpunkt φ_1 auf e_v haben, so ist, sobald man den einen Punkt a_1 beliebig annimmt, auch das obere Basispolygon $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$ vollständig bestimmt (die Polygone $abcde$ und $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$ sind dann offenbar zwei affine Figuren, für e_v als Affinitätsachse und die Bilder der Prismenkanten als Affinitätsstrahlen).

Das Lichtcentrum L sei auf dem Träger $\delta\varphi$ gegeben.

Vorerst wollen wir den Schlagschatten des Prisma auf seine Basisebene $e_v e_b$ ermitteln. Der Schatten der Basis $abcde$ fällt unmittelbar mit derselben zusammen, während die Schlagschatten der oberen Basispunkte $a_1 \ldots e_1$, als die Schnittpunkte der Ebene $e_v e_b$ mit den Lichtstrahlen $La_1 \ldots Le_1$, auf folgende einfache Weise erhalten werden.

Wir ziehen durch L eine Parallele s zu den Prismenkanten und bestimmen deren Schnittpunkt Δ mit der Ebene $e_v e_b$ mit Hilfe der durch den Träger $\delta\varphi$ parallel zu den Prismenkanten gelegten Hilfsebene $h_v h_b$. Denken wir uns nun durch s und durch die Prismenkante ee_1 eine Ebene gelegt, so wird dieselbe die Ebene

$e_v e_b$ offenbar in der Geraden $e\Delta$ schneiden. Die Ebene (s, ee_1) enthält aber auch den Lichtstrahl Le_1; der Durchstosspunkt e_s des letzteren mit der Ebene $e_v e_b$, d. i. der Schlagschatten des Punktes e_1 auf $e_v e_b$ muss demnach der Schnittpunkt von Le_1 und $e\Delta$ sein.

In gleicher Weise kann man die Schlagschatten a_s, b_s, c_s und d_s der Punkte a_1, b_1, c_1, d_1 auf die Ebene $e_v e_b$ konstruieren.

Hierbei repräsentieren gleichzeitig die Geraden $aa_s \ldots ee_s$ die Schlagschatten der Prismenkanten $aa_1 \ldots ee_1$ auf die Ebene $e_v e_b$, während $a_s b_s$, $b_s c_s$, $c_s d_s$, $d_s e_s$ die Schlagschatten der oberen Basiskanten vorstellen. Die Gerade $a_s b_s$ trifft das untere Begrenzungspolygon $abcde$ in dem Punkte p so, dass, wenn man von allen gefundenen Schlagschatten die äusserste Umgrenzung verzeichnen würde, sich das Polygon $aa_s pdee_s d_s c_s b_s ba$ als Schlagschatten des Prisma auf die Ebene $e_v e_b$ ergeben würde.

Auf den ersten Blick ist aber klar, dass gewisse Teile des genannten Schlagschattens unwesentlich werden, nachdem einerseits der Schatten teilweise von dem Prisma selbst und anderseits aber auch teilweise schon von der Bildebene aufgefangen wird.

Vor allem ist ersichtlich, dass ein Teil des vorgefundenen Schlagschattens auf die Ebene $e_v e_b$ im Inneren der Prismabasis liegt; derselbe ist durch das Polygon $aa_s pdpcba$ dargestellt. Bei p übertritt der Schlagschatten auf die innere Fläche des Prisma selbst. Um diesen Teil des Schlagschattens zu bestimmen, wenden wir wieder die Methode der „Zurückführung“ an. Man bemerkt nämlich, dass sich die Schlagschatten $a_s b_s$ und cc_s der beiden Geraden $a_1 b_1$ und cc_1 in einem Punkte r_s treffen. Der durch r_s gezogene Lichtstrahl Lr_s schneidet demnach die Kante cc_1 in einem Punkte r'_s, welcher den Schlagschatten eines gewissen Punktes r von $a_1 b_1$ auf cc_1 repräsentiert; es wird mithin die Verbindungsgerade pr'_s den Schlagschatten der Kante $a_1 b_1$ auf die Seitenfläche $cc_1 d_1 d$ darstellen. Da ferner der Grenzpunkt b_1 mit seinem Schatten auf die Seitenfläche $bb_1 c_1 c$ zusammenfällt, so ist $r'_s b_1$ der Schlagschatten von $a_1 b_1$ auf die Seitenfläche $bb_1 c_1 c$; es wird demnach $pr'_s b_1$ die Begrenzung des Schlagschattens auf der inneren Prismenfläche repräsentieren.

Ebenso erkennt man aus dem Umstande, dass der früher gefundene Schlagschatten des Prisma auf die Basisebene sich bloss bis zur Bildflächtrace e_b der letzteren fortsetzen kann, dass derselbe von hier aus auf die Bildebene übergehe. Der jenseits e_b

liegende Teil $mb_sc_sd_sn$ des vorgenannten Schlagschattens kömmt mithin gar *nicht in Betracht*, sondern *wird durch den entsprechenden* Schlagschatten auf die Bildebene ersetzt. Dieser letztere kann folgendermassen bestimmt werden.

Der Schlagschatten des Punktes d_1 auf die Bildebene wird durch den Bildflächdurchstosspunkt des Lichtstrahles Ld_1 dargestellt. Zur Bestimmung desselben dient jene Ebene, welche die beiden zu einander und zur Bildebene parallelen Geraden $L\Delta$ und dd_1 enthält und die Ebene e_ve_b in der Geraden Δd schneidet. Nachdem die letztere ihren Bildflächdurchstosspunkt δ_1 in e_b hat, so wird die durch δ_1 parallel zu $L\Delta$ geführte Gerade $\delta_1 d'_s$ die Bildflächtrace der Hilfsebene $(L\Delta, dd_1)$ darstellen und ihr Schnitt mit Ld_1 den gesuchten Schlagschatten d'_s repräsentieren. In gleicher Weise können auch die Schlagschatten b'_s und c'_s von b_1 und c_1 ermittelt werden. Schliesslich erhält man sonach den Schlagschatten des Prisma auf die Bildebene in $mb'_sc'_sd'_sn$ dargestellt.

§ 423.

174. Aufgabe: **Auf einem senkrechten Kreiscylinder, dessen Basisebene senkrecht zur Bildebene steht, ruht koaxial ein zweiter, grösserer Rotationscylinder auf; es sind die sich ergebenden Schatten zu ermitteln.**

In Fig. 311, Taf. XXV sind die Bildebene vertikal und die zu ihr senkrechten Basisebenen der beiden Cylinderflächen demnach horizontal vorausgesetzt. Die Cylinder haben also vertikale Erzeugenden, die beziehungsweise durch aa_1bb_1 und cc_1dd_1 dargestellt seien. Dieselben sind durch vier horizontale Kreise begrenzt, welche in centralprojektivischer Darstellung als die Ellipsen K, K_1, K' und K'_1 erscheinen. Ferner sei V der Fluchtpunkt der Lichtstrahlen.

Denkt man sich die sämtlichen Lichtstrahlen orthogonal auf die Basisebenen der Cylinder projiziert, so erhält man Parallelstrahlenbüschel, deren Fluchtpunkt v sich im Schnitte der Fluchttrace e_v der genannten Basisebenen mit der durch V gezogenen vertikalen Geraden ergibt.

Nehmen wir im vorliegenden Falle auf die Bildebene, als schattenauffangende Ebene, keine Rücksicht, so werden bloss die Selbstschatten beider Cylinder, ferner ihre Schlagschatten auf die

unterste Basisebene $e_v e_b$ und endlich der Schlagschatten des oberen Cylinders auf den unteren zu konstruieren sein.

Die Selbstschattengrenzen irgend eines Cylinders sind, wie man den früheren allgemeinen Bemerkungen unmittelbar entnimmt, die Berührungserzeugenden des Cylinders mit den zu den Lichtstrahlen parallelen Tangentialebenen.

Führt man demnach von dem Fluchtpunkte v an den Basiskreis K die Tangente $v\alpha$, so repräsentiert dieselbe offenbar den Schnitt der Basisebene $e_v e_b$ mit einer zu den Lichtstrahlen parallelen Tangentialebene des unteren Cylinders (vergl. Aufgabe 101), während die durch den Berührungspunkt α gehende Cylindererzeugende $\alpha\beta$ die Berührerzeugende dieser Tangentialebene darstellt, also die eine Selbstschattenlinie des unteren Cylinders bestimmt. (Die zweite Selbstschattenerzeugende oder Trennungslinie zwischen Licht und Schatten, welche der anderen durch v gehenden Tangente des Basiskreises K entspricht, erscheint gedeckt, wurde daher nicht konstruiert.)

In gleicher Weise findet man die sichtbare Selbstschattenerzeugende oder schattenwerfende Kante des oberen Cylinders, indem man von v an den Basiskreis K' die Tangente $v\gamma$, und durch deren Berührungspunkt γ die Cylindererzeugende $\gamma\delta$ zieht.

Der Schlagschatten der beiden Cylinder auf die Basisebene $e_v e_b$ setzt sich aus mehreren Teilen zusammen.

Der untere Basiskreis K fällt mit seinem Schlagschatten unmittelbar zusammen. Die Schlagschatten der beiden Kreise K' und K'_1 werden durch die Schnitte der Ebene $e_v e_b$ mit den durch diese Kreise parallel zu den Lichtstrahlen gelegten Cylindern dargestellt erscheinen, und sich mithin wieder als zwei mit den vorgenannten Kreisen K' und K'_1 kongruente Kreise, welche centralprojektivisch durch die Ellipsen K'_s und K'_{1s} dargestellt sind, repräsentieren.

Weiter gehören dem Schlagschatten auf die Ebene $e_v e_b$ auch die Schatten der Selbstschattenerzeugenden $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ an, d. s. die Schnitte $v\alpha$ und $v\Delta$ der Ebene $e_v e_b$ mit den früher gefundenen zu den Lichtstrahlen parallelen Cylindertangentialebenen. Der Schlagschatten auf die Ebene $e_v e_b$ wird sodann durch die äussere Umgrenzung $\alpha 4 5 6 \ldots$ aller dieser Teilschatten gebildet.

Es erübrigt jetzt nur noch die Bestimmung des Schlagschattens des oberen Cylinders (der Deckplatte) auf den unteren.

Die blosse Anschauung zeigt schon, dass derselbe bloss von einem bestimmten Teile des Kreises **K'** herrühren könne. Besagter Schatten wird sich als Schnitt des unteren Cylinders mit dem durch **K'** parallel zu den Lichtstrahlen gelegten (Licht-)Cylinder ergeben, und kann somit anstandslos in nachstehender Weise konstruiert werden.

Alle Ebenen, welche zur Lichtstrahlenrichtung und zu den Cylindererzeugenden parallel sind, besitzen offenbar die vertikale Gerade **Vv** zur Fluchttrace.

Nehmen wir demnach irgend einen beliebigen Punkt **f** auf dem Kreise **K'** an, so wird sich dessen Schatten auf dem unteren Cylinder wie folgt finden lassen. Wir denken uns durch **f** jene Ebene gelegt, deren Fluchttrace **Vv** ist, also jene Ebene geführt, welche zu den Lichtstrahlen sowohl, als auch zu den Cylindererzeugenden parallel ist. Besagte Ebene wird einerseits den dem Punkte **f** entsprechenden Lichtstrahl **Vf** enthalten, anderseits aber die Ebene der Kreise **K'** und K_1 in der Geraden **fv** schneiden. Die letztere Gerade **fv** trifft ferner den Kreis K_1 in dem Punkte **e**, und wird daher offenbar auch die durch **e** gezogene Cylindererzeugende **e**3 der Hilfsebene (**f**, **Vv**) angehören. Der Schnittpunkt 3 von **e**3 mit dem Lichtstrahle **fV** ist sodann auch der Schnittpunkt des letzteren mit dem unteren Cylinder, also der Schlagschatten des Punktes **f** von **K'** auf den Cylinder **C**.

Ermittelt man auf gleiche Weise die Schlagschatten anderer Punkte von **K'** auf den Cylinder **C**, so wird man durch stetige Verbindung der gefundenen Punkte den Schlagschatten 1 . . 3 . . 2 des oberen Cylinders resp. der Deckplatte C_1 auf den unteren **C** erhalten.

§ 424.

175. Aufgabe: **Es ist der Schlagschatten eines hyperbolischen Paraboloides auf die Bildebene zu bestimmen.**

Der Schlagschatten einer krummen Fläche auf eine Ebene ist der Schnitt der letzteren mit dem der Fläche aus der Lichtquelle **L** als Scheitel umschriebenen Kegel (oder Cylinder, wenn **L** unendlich ferne liegt).

Ist die Fläche insbesondere windschief, so sind die durch die Lichtquelle **L** und die einzelnen Erzeugenden derselben gelegten Ebenen (Satz, § 343) Tangentialebenen der Fläche, also auch Tangentialebenen des umschriebenen Kegels.

Die Schnittkurve des letzteren mit der schattenfangenden Ebene ist sodann die Umhüllungskurve der Schnittgeraden aller vorgenannten Tangentialebenen mit der bezeichneten schattenfangenden Ebene. Nachdem aber die besagten Schnittgeraden gleichzeitig die Schlagschatten der einzelnen Erzeugenden der Fläche vorstellen, so folgt, dass der Schlagschatten einer windschiefen Fläche auf eine Ebene die Enveloppe der Schlagschatten aller ihrer Erzeugenden ist.

Diese Eigenschaft lässt sich mit Vorteil bei Lösung der gestellten Aufgabe verwerten.

Das hyperbolische Paraboloid sei als Ort der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier ähnlicher Reihen auf den beiden sich nicht schneidenden Trägern $d_1 v_1 = l'$ und $d_2 v_2 = l''$ [Fig. 312, Taf. XXV] gegeben. (Satz in § 329.) Diese Reihen mögen durch zwei Paare entsprechender Punkte a', a''; b', b'' bestimmt sein. Weiter stelle V den gemeinschaftlichen Fluchtpunkt aller Lichtstrahlen vor.

Bestimmen wir die Schatten l'_s und l''_s der beiden Träger l' und l'' als Bildflächtracen der durch die letzteren parallel zu den Lichtstrahlen gelegten Hilfsebenen $h'_v h'_b$ und $h''_v h''_b$ und ermitteln wir auf l'_s und l''_s die Schlagschatten a'_s, b'_s; a''_s, b''_s der bezüglichen Punkte a', b' und a'', b'', so werden [da bei parallelen Lichtstrahlen der Schlagschatten einer Reihe eine mit dieser ähnliche Reihe (§ 166 und § 167) sein muss], die Schlagschatten der beiden ähnlichen Reihen $(a' b' \ldots)$ und $(a'' b'' \ldots)$ wieder zwei ähnliche Reihen $(a'_s b'_s \ldots)$ und $(a''_s b''_s \ldots)$ sein, welche durch die beiden Paare a'_s, a''_s; b'_s, b''_s entsprechender Punkte vollständig bestimmt sind, und von welchen mit Zugrundelegung der Beziehung:

$$\frac{a'_s c'_s}{b'_s c'_s} = \frac{a''_s c''_s}{b''_s c''_s}$$

beliebige weitere Paare entsprechender Punkte c'_s, c''_s; . . . gefunden werden können.

Da nun irgend zwei entsprechende Punkte c'_s und c''_s dieser Reihen nichts anderes als die Schlagschatten zweier entsprechenden Punkte c' und c'' der ursprünglich gegebenen Reihen sind, so repräsentiert die Gerade $c'_s c''_s = g^c_s$ den Schlagschatten der Erzeugenden $c' c'' = g_c$ des Paraboloides, also eine Tangente der gesuchten Schlagschattenkurve. Die letztere ist mithin durch

jene Parabel P dargestellt, deren Tangenten die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte der beiden ähnlichen Reihen $(a'_s b'_s c'_s \ldots)$ und $(a''_s b''_s c''_s \ldots)$ repräsentieren.

§ 425.

176. Aufgabe: **Eine Rotationsfläche von becherförmiger Gestalt (offen) ist centralprojektivisch unter der Voraussetzung dargestellt, dass ihre Achse senkrecht zur Bildebene steht; es soll der Schlagschatten der Fläche ins Innere derselben und auf die Bildebene konstruiert werden.**

Sei $Z = AD$ [Fig. 313, Taf. XXV] das Bild der zur Bildebene senkrechten Drehachse und M das Bild des in der Meridianebene $M_v M_b$ liegenden Meridians.

Die Kontur der Rotationsfläche besteht aus dem Bilde K des obersten (begrenzenden) Parallelkreises und einem Teil der Enveloppe aller übrigen Parallelkreisbilder (welche wie in Aufgabe 129, § 367, konstruiert wurden); ferner stelle V den Fluchtpunkt der Lichtstrahlen vor.

Der Schlagschatten der Rotationsfläche auf die Bildebene ist der Schnitt der letzteren mit dem der Fläche parallel zu den Lichtstrahlen umschriebenen Cylinder, oder mit anderen Worten: die Enveloppe der Bildflächtracen aller zu den Lichtstrahlen parallelen Tangentialebenen der Fläche. Mit Zugrundelegung der letzteren Eigenschaft kann der verlangte Schlagschatten auf eine besondere Weise konstruiert werden.

Nehmen wir einen beliebigen Parallelkreis der Rotationsfläche an, etwa denjenigen K', welcher zum Mittelpunkt den Punkt o auf Z hat und durch den Punkt α' des Meridians M geht (wobei, wie aus den in § 367 angestellten Betrachtungen bekannt, $o'\alpha'$ parallel zu M_b sein muss). Der Schlagschatten dieses Parallelkreises K' wird, infolge der zur Bildebene parallelen Lage des letzteren, wieder ein Kreis K'_s sein, dessen Mittelpunkt der Schlagschatten o'_s von o' ist und welcher durch den Schlagschatten α'_s des Punktes α' gehen muss.

Nachdem aber die Rotationsfläche längs des Parallelkreises K' von einem Rotationskegel berührt wird, gibt es zwei zu den Lichtstrahlen parallele Tangentialebenen dieses Kegels, welche notwendig auch die Rotationsfläche in zwei bestimmten Punkten ξ und η des Kreises K' berühren müssen. Die Bildflächtracen

dieser Ebenen berühren sodann auch die Bildflächspur des umschriebenen Lichtcylinders und ebenso den Schlagschatten K'_s des Parallelkreises K' in jenen beiden Punkten, welche die Schlagschatten der vorgenannten Punkte ξ und η repräsentieren.

Hieraus folgt aber, dass der Schlagschatten der Rotationsfläche den Schlagschatten K'_s des Parallelkreises K' in zwei Punkten berühren werde.

Nachdem das Gleiche für jeden anderen Parallelkreis gilt, so wird man auf dieselbe Art wie K' resp. K'_s gefunden wurde, die Schlagschatten einer beliebigen Anzahl von Parallelkreisen K'', K'''... konstruieren, und die Schlagschattenkurve der Rotationsfläche als Enveloppe dieser Kreisschatten K'_s, K''_s, K'''_s . . . erhalten.

Es erübrigt nun noch die Bestimmung jenes Schattens in das Innere der Fläche, welcher vom oberen Parallelkreise K herrührt.

Hierzu können zweckmässig die vorher konstruierten Schlagschatten der einzelnen Parallelkreise benützt werden. So trifft beispielsweise der Schlagschatten K'_s des Parallelkreises K' den Schlagschatten K_s des oberen Parallelkreises K in zwei Punkten r_s und s_s. Führt man daher durch r_s den Lichtstrahl $r_s V$, so wird derselbe die Kreise K und K' beziehungsweise in den Punkten r und r'_s treffen, wovon der zweite r'_s den Schlagschatten des ersteren r auf der Innenseite der Rotationsfläche repräsentiert. Durch beliebige Wahl anderer Parallelkreise an die Stelle von K' lassen sich nunmehr durch den gleichen Vorgang und mit derselben Leichtigkeit willkürlich viele Punkte des ins Innere der Fläche fallenden Schlagschattens ermitteln.

Der besagte Schlagschatten beginnt offenbar in den beiden Punkten m und n des oberen Parallelkreises K, welche die Berührungspunkte zweier Tangentialebenen der Rotationsfläche die zu den Lichtstrahlen parallel sind, vorstellen.

Um diese Punkte zu erhalten, bestimmt man den Scheitel σ des der Rotationsfläche längs des Kreises K umschriebenen Kegels, d. i. den Schnittpunkt σ der Achse Z mit der Tangente τ der Meridiankurve M in dem dem bezeichneten Kreise K angehörenden Punkte a, führt sodann die Gerade σV und bestimmt, indem man $o\Delta$ parallel zu AV zieht, deren Schnittpunkt Δ mit der Ebene des Kreises K. Die Berührungspunkte der von Δ aus an K gezogenen Tangenten liefern bereits die vorher näher bezeichneten Punkte m und n.

§ 426.

177. Aufgabe: **Eine halbe Kugel ruht mit ihrem grössten Kreise auf der Bildebene; es soll der Schlagschatten derselben auf die Bildebene, sowie ihr Selbstschatten konstruiert werden.**

Seien o [Fig. 314, Taf. XXV] der in der Bildebene liegende Kugelmittelpunkt, K der grösste Kreis der Halbkugel in der Bildebene, V der Fluchtpunkt der Lichtstrahlen und (A, C) das Projektionscentrum.

Die Kontur Σ (Ellipse) dieser Kugel wurde (wie in § 377) mit Hilfe des Daudelin'schen Satzes gefunden, und eben dieser Satz gestattet auch eine einfache Konstruktion des Schlagschattens der Kugel auf die Bildebene. Nachdem nämlich der bezeichnete Satz (wie den Betrachtungen in § 377 leicht zu entnehmen) nicht nur für einen einer Kugel umschriebenen Kegel, sondern auch für einen derselben umschriebenen Cylinder gilt, und im vorliegenden Falle der Schlagschatten der Kugel auf die Bildebene die Schnittkurve zweiten Grades der letzteren mit dem der Kugel parallel zu den Lichtstrahlen umschriebenen Cylinder ist, so wird man die Brennpunkte der Schlagschattenkurve als die Schlagschatten der Endpunkte des zur Bildebene senkrechten Kugeldurchmessers erhalten.

Zur Erreichung dieses Zweckes legen wir durch den Kugelmittelpunkt o eine zur Bildebene senkrechte und zu den in V verschwindenden Lichtstrahlen parallele Ebene $e_v e_b$. Die besagte Ebene enthält den zur Bildebene senkrechten Kugeldurchmesser z und schneidet die Kugel in einem grössten Kreise. Nach der Umlegung um e_b erscheinen z und der genannte grösste Kreis beziehungsweise in z_0 und $K_0 = K$ dargestellt.

Zieht man durch die umgelegten Durchmesserendpunkte a'_0 und b'_0 von z_0 parallel zum umgelegten Fluchtstrahle $C_0 V$ der Lichtstrahlen die Geraden $a'_0 f_1$ und $b'_0 f_2$, so treffen dieselben die Trace e_b bereits in den gesuchten Brennpunkten f_1 und f_2.

Führt man ferner parallel zu $C_0 V$ an K die Tangenten τ_α und τ_β, so schneiden diese die Trace e_b in zwei Punkten A und B der zu bestimmenden Schattenkurve. Selbstverständlich sind durch A und B die Scheitel der Brennpunktsachse $f_1 f_2$ dargestellt. Ebenso ergibt sich ohne weiteres auch, dass die zweite Achse

der Schattenellipse durch die Gerade $a'_0 b'_0$ (also dem Kugeldurchmesser unmittelbar gleich) dargestellt erscheine.

Hieraus lässt sich die Ellipse anstandslos konstruieren. Selbstverständlich ist bloss jene Hälfte $a'_0 A b'_0$ derselben als Schlagschatten aufzufassen, welche der über der Bildebene liegenden Halbkugel entspricht.

Als Selbstschatten der Kugel ergibt sich die Berührungskurve des ihr parallel zu den Lichtstrahlen umschriebenen Cylinders, d. i. jener grösste Kreis, dessen Ebene $S_v S_b$ senkrecht zu den Lichtstrahlen liegt. Die Konstruktion des betreffenden Kreisbildes wurde, als aus Früherem bekannt, hier nicht weiter durchgeführt.

§ 427.

178. Aufgabe: **Ein als offen vorausgesetzter hohler Rotationskegel ist so dargestellt, dass seine Achse zur Bildebene senkrecht steht und sein Scheitel in der Bildebene liegt; es soll der Schlagschatten des Kegels auf seine Innenfläche und auf die Bildebene konstruiert werden.**

Der in der Bildebene liegende Kegelscheitel sei S [Fig. 315, Taf. XXVI]; $SA = Z$ stelle die Kegelachse vor, und der aus einem beliebigen Punkte o von Z als Mittelpunkt gezeichnete Kreis K repräsentiere das Bild des zur Bildebene parallelen Begrenzungskreises des Kegels. Die von S an K gezogenen Tangenten sind diesfalls die Konturgeraden des Kegels. Ferner sei V der Fluchtpunkt der Lichtstrahlen.

Der Schatten des in der Bildebene liegenden Kegelscheitels S fällt selbstverständlich mit diesem selbst zusammen.

Der Schlagschatten des zur Bildebene parallelen Kreises K auf die Bildebene wird selbst wieder als jener Kreis K_s erscheinen, dessen Mittelpunkt der Schlagschatten o_s des Punktes o ist, und welcher durch den Schlagschatten a_s eines beliebigen Punktes a (wobei $a_s o_s$ parallel zu ao ist) von K geht.

Der Schlagschatten des Kegels auf die Bildebene ist zusammengesetzt aus dem Kreise K_s und aus den Bildflächtracen der zu den Lichtstrahlen parallelen Kegeltangentialebenen. Die Tracen dieser Tangentialebenen gehen einerseits durch S, und anderseits müssen dieselben die Schlagschatten aller auf dem Kegel liegenden Kurven, also auch den Kreis K_s, berühren; dieselben erscheinen

mithin durch die von S ausgehenden Tangenten T_b^m und T_b^n des Kreises K_s dargestellt.

Der Schlagschatten des Kegels in das Innere rührt von jenem Teile mn des oberen Begrenzungskreises K her, dessen Schatten $m_s n_s$ innerhalb der Schlagschattengrenze des Kegels auf der Bildebene liegt. Derselbe beginnt somit in den Punkten m und n. Weitere Punkte desselben können nach der schon mehrfach zur Anwendung gebrachten Zurückführungsmethode des Lichtstrahles konstruiert werden.

Zieht man nämlich eine beliebige durch S gehende Gerade, welche K_s in den beiden Punkten a_s und p_s schneiden möge, so repräsentiert dieselbe den Schlagschatten einer bestimmten Kegelerzeugenden aS resp. pS. Nachdem sich weiter die Schlagschatten dieser Erzeugenden und des Kreises K in p_s decken, so wird der durch p_s gehende Lichtstrahl Vp_s die Erzeugende aS und den Kreis K beziehungsweise in den Punkten p_s^1 und p in der Weise treffen, dass p_s^1 den Schlagschatten von p auf die Erzeugende aS in das Innere des Kegels darstellt. Auf Grund derselben Betrachtungen, mittels welchen p_s^1 bestimmt wurde, können nun beliebig viele Punkte des verlangten Innenschattens ermittelt werden.

§ 428.

179. Aufgabe: **Ein halbes dreiachsiges Ellipsoid ist so darzustellen, dass die eine Halbachse senkrecht zur Bildebene stehe, also die die Fläche begrenzende Hauptebene mit dem in ihr liegenden Achsenschnitte eine zur Bildebene parallele Lage annehme. Die Fläche wird als offen vorausgesetzt. Unter Voraussetzung paralleler Lichtstrahlen sind alle vorkommenden Schlag- und Selbstschatten zu konstruieren.**

Der in der Bildebene liegende Endpunkt der zur Bildebene senkrechten Halbachse sei F [Fig. 316, Taf. XXVI]; AF sei das Bild der letzteren und O der Flächenmittelpunkt auf AF. Ferner mögen die durch O gehenden Geraden AB und CD die beiden anderen, selbstverständlich zur Bildebene parallelen Achsen des Halbellipsoides, und K das Bild der durch dieselben bestimmten und die halbe Fläche begrenzenden Hauptellipse repräsentieren. Gleichzeitig denken wir uns die Kontur C_p des Ellipsoides auf bereits bekannte Art konstruiert. Der Fluchtpunkt der Lichtstrahlen ist in V gegeben.

Nachdem das Halbellipsoid längs der Ellipse **K** offen gedacht wird, so werden sich nachstehende Schatten ergeben.

a) Der Schlagschatten auf die Bildebene, b) der Schlagschatten, welchen ein bestimmter Teil der Ellipse **K** in das Innere der Fläche wirft, und c) der Selbstschatten der Fläche.

Der Schlagschatten, den die gegebene Fläche auf die Bildebene wirft, ist zusammengesetzt aus dem Schlagschatten der Ellipse **K** und aus jenem Teile der Bildflächspur des dem Ellipsoide parallel zu den Lichtstrahlen umschriebenen Cylinders, welcher dem vorhandenen halben Ellipsoide entspricht.

Ermittelt man die Schlagschatten O_s, A_s, B_s, C_s, D_s, d. s. die Schatten des Flächenmittelpunktes **O** und der Achsenendpunkte **A**, **B**, **C**, **D**, so wird die über den Achsen A_sB_s und C_sD_s beschriebene, mit **K** ähnlich liegende Ellipse K_s den Schlagschatten von **K** auf die Bildebene repräsentieren. (Gleichzeitig stellen, wie an und für sich klar, A_sB_s, C_sD_s und K_s die wahren Grössen von **AB**, **CD** und **K** dar.)

Der Schlagschatten, welcher sich als Bildflächspur des dem Ellipsoide umschriebenen Lichtcylinders ergibt, muss, wie schon in vorausgeschickten Aufgaben gezeigt wurde, den Schlagschatten jeder auf dem Ellipsoide liegenden Kurve, also auch den Schlagschatten K_s der Ellipse **K** in zwei Punkten berühren. Bezeichnen wir diesen Schlagschatten kurz mit C_s.

Der dem Ellipsoide umschriebene Lichtcylinder, also auch dessen Bildflächspur C_s ist bekanntlich vom zweiten Grade; die Achse desselben ist (wie aus den Betrachtungen in §§ 292—294 folgt) der durch den Flächenmittelpunkt **O** gehende Lichtstrahl. Der Mittelpunkt der Schlagschattenkurve C_s ist mithin der Schlagschatten O_s des letztgenannten Punktes **O**.

Es wird nun auch leicht sein, zwei konjugierte Durchmesser der Kurve C_s zu finden. Zu diesem Zwecke beachten wir, dass der dem Ellipsoide längs der zur Bildebene parallelen Hauptellipse umschriebene Cylinder zur Bildebene senkrecht steht. An diesen Cylinder lassen sich anstandslos zwei zu den Lichtstrahlen parallele Tangentialebenen legen. Die Fluchttrace e_v dieser Ebenen ist offenbar die Gerade **AV**, während die Schnitte der besagten Ebenen mit der Ebene der Ellipse **K** die zu **AV** parallelen Tangenten t_m und t_n sein werden.

Bestimmt man demnach auf K_s die Schlagschatten m_s und n_s der Berührungspunkte **m** und **n** dieser Tangenten, und

zieht durch m_s und n_s die zu t_m und t_n parallelen Tangenten T_b^m und T_b^n von K_s, so werden dieselben bereits die Bildflächtracen der vorgenannten Cylindertangentialebenen darstellen.

Nachdem aber die bezeichneten Ebenen auch das Ellipsoid in m und n berühren, so sind sie auch Tangentialebenen des dem Ellipsoide umschriebenen Lichtcylinders; ihre Bildflächtracen T_b^m und T_b^n werden mithin die Tangenten der Schlagschattenkurve C_s in den Punkten m_s und n_s sein.

Infolge der Parallelität dieser Tangenten ist $m_s n_s$ ein Durchmesser von C_s, während die durch O_s parallel zu T_b^m, T_b^n und AV geführte Gerade e_b den hierzu konjugierten Durchmesser darstellt. Um die Endpunkte des letzteren zu bestimmen, betrachten wir $AV = e_v$ als Fluchttrace und e_b als Bildflächtrace einer Hilfsebene. Diese Hilfsebene ist parallel zu den Lichtstrahlen, senkrecht zur Bildebene, und enthält die Halbachse OF des Ellipsoides; sie wird daher das Ellipsoid in einer Ellipse U schneiden, deren eine Achse OF selbst ist, und deren andere Achse mit dem in der Ebene $e_v e_b$ liegenden Durchmesser ab der Ellipse K zusammenfällt.

Denken wir uns an die eben genannte Ellipse U parallel zu den Lichtstrahlen eine Tangente gezogen, so wird deren Bildflächdurchstosspunkt in der Trace e_b liegen, und mithin den einen in e_b liegenden Durchmesserendpunkt der Schlagschattenkurve C_s vorstellen. Um den besagten Punkt zu finden, legen wir die Achsen OF und ab um e_b in die Bildebene beziehungsweise nach FO_0 und $a_0 b_0$ um und ziehen, indem wir von dem über der Achse $E_0 F = 2 \cdot O_0 F$ beschriebenen Affinkreise k_0 der umgelegten Ellipse U_0 Gebrauch machen, an U_0 die zum umgelegten Fluchtstrahle $C_0 V$ der Lichtstrahlen parallele Tangente t_0, so erhalten wir in deren Schnittpunkt mit e_b den vorgenannten Durchmesserendpunkt P der Schattenellipse C_s.

Führen wir gleichzeitig auch den Berührungspunkt p_0 der Tangente t_0 mit der Ellipse U_0 nach p zurück, so repräsentiert p den Berührungspunkt des Ellipsoides mit einer zur Lichtstrahlenrichtung parallelen Tangente.

Die Schlagschattenkurve C_s ist somit durch den Durchmesser $m_s n_s$ und den ihm konjugierten Halbdurchmesser $O_s P$ vollständig bestimmt, und kann hieraus auf bekannte Art punktweise konstruiert werden, so dass man in $P m_s D_s b_s n_s P$ den Schlagschatten auf die Bildebene erhält.

Der Selbstschatten ist jener Diametralschnitt des Ellipsoides, welcher die Berührungskurve des Lichtcylinders repräsentiert. Den vorhergehenden Konstruktionen gemäss sind **m**, **n** und **p** als Berührungspunkte des Ellipsoides mit zu den Lichtstrahlen parallelen Tangenten und Tangentialebenen bereits drei Punkte der genannten Berührungs- oder Selbstschattenkurve. Um diese Kurve zu finden, hätte man bloss den Schnitt des Ellipsoides mit der durch **m**, **n** und **p** gelegten Durchmesserebene zu ermitteln. Nachdem jedoch die betreffende Kurve im vorliegenden Falle gedeckt erscheint, wurde von der Durchführung der eben angegebenen Konstruktion Umgang genommen.

Da weiter ein Teil $m_s A_s C_s n_s$ des Ellipsenschattens K_s innerhalb der Umgrenzung des gesamten Schlagschattens liegt, so wird, wie schon in den vorher besprochenen Fällen klar gelegt wurde, der diesem Teile entsprechende Teil **mACn** der Ellipse **K** seinen Schlagschatten in das Innere des Ellipsoides werfen.

Dieser Schlagschatten ist der geometrische Ort der Schnittpunkte des Ellipsoides mit den durch die einzelnen Punkte von **mACn** gezogenen Lichtstrahlen. Derselbe bildet daher einen Teil jener Kurve K'_s zweiten Grades, in welcher (Satz 1, § 299 oder § 308) der durch **K** gelegte Lichtcylinder das Ellipsoid zum zweitenmal schneidet.

Zur Bestimmung dieser Kurve K'_s genügen daher drei ihrer Punkte. Zwei derselben sind bereits **m** und **n**; ein dritter Punkt wird als Schnittpunkt des durch $r = a$ gehenden Lichtstrahles $Va = l$ mit dem Ellipsoide resp. mit der in $e_v e_h$ liegenden Ellipse **U** (mit Hilfe der Umlegung U_0 und des mit U_0 affinen Kreises) in r' gefunden.

Um K'_s selbst zu finden, hätte man bloss den Schnitt des Ellipsoides mit der durch **m**, **n** und r' gehenden Ebene zu bestimmen. Nachdem jedoch **K** und K'_s auf demselben Lichtcylinder liegen, so sind ihre Bilder (Satz 1, § 266) kollinear in bezug auf **V** als Kollineationscentrum und das Bild $mn = S$ der Schnittgeraden ihrer Ebenen als Kollineationsachse; man kann daher K'_s leicht als die mit **K** kollineare Kurve ableiten, indem man von **V**, **S** und dem entsprechenden Punktepaare **r**, r' (wie in § 192 gezeigt wurde) Gebrauch macht.

Anhang.

Besondere centralprojektivische Darstellungsarten.

XXIX. Kapitel.

a) Centralprojektivische Darstellung der Reliefs gegebener Originalgebilde.

§ 429.

An früherer Stelle (§ 217) wurden bereits die allgemeinen Eigenschaften zweier räumlich kollinearen Gebilde entwickelt; es erübrigt nun noch einige weitere Betrachtungen daran zu knüpfen.

Stelle **C** [Fig. 317, Taf. XXVI] das Kollineationscentrum, **CE** die Kollineationsebene zweier räumlich-kollinearen Systeme **S** und S_1; ferner **GE** die Gegenebene im Systeme S_1, d. i. jene Ebene vor, welche kollinear der unendlich fernen Ebene des Systems **S** entspricht. Die Charakteristik der kollinearen Beziehung ist bekanntlich (§ 217) durch das konstante Doppelverhältnis $(CbBB_1)$ dargestellt, welches irgend zwei einander entsprechende Punkte **B**, B_1, als Teilpunkte; das Kollineationscentrum **C** und der Schnittpunkt **b** des Kollineationsstrahles **CB** mit der Kollineationsebene, als Fixpunkte, bilden.

Dieses Doppelverhältnis kann durch ein einfaches Verhältnis ausgedrückt werden, wenn man statt eines beliebigen Punktepaares **B**, B_1 den unendlich fernen Punkt **V** irgend eines Kollineationsstrahles und den ihm entsprechenden Punkt V_1 der Gegenebene **GE** wählt. Ist diesfalls **v** der Schnittpunkt des genannten Strahles mit der Kollineationsebene, so ist die Charakteristik:

$$(CvVV_1) = \frac{CV}{vV} : \frac{CV_1}{vV_1} = 1 : \frac{CV_1}{vV_1} = \frac{vV_1}{CV_1}.$$

Denken wir uns nun in den beiden räumlich-kollinearen Systemen **S** und S_1 irgend zwei einander entsprechende Gebilde, beispielsweise die beiden Tetraeder **ABCF** und $A_1B_1C_1F_1$ [Fig. 317, Taf. XXVI] angenommen.

Je zwei entsprechende Geraden dieser Tetraeder, wie etwa **AB** und A_1B_1, schneiden die Kollineationsebene **CE** in dem nämlichen Punkte **d**, und je zwei entsprechende Punkte, wie etwa **B** und B_1 . . . liegen auf einem und demselben (durch **C** gehenden) Kollineationsstrahle.

Identifiziert man demnach das Kollineationscentrum **C** mit dem Auge eines Beobachters, so, dass die Kollineationsstrahlen die Bedeutung von Sehstrahlen erhalten, so ist einleuchtend, dass die beiden Tetraeder **ABCF** und $A_1B_1C_1F_1$ den gleichen optischen Eindruck auf dieses Auge hervorbringen werden.

Berücksichtigt man weiter, dass allen Punkten des Systems **S**, welche hinter der Bildebene liegen, solche Punkte des Systems S_1 entsprechen, welche sich zwischen den beiden Ebenen **CE** und **GE** befinden, so ist klar, dass, wenn man eine kleine „Charakteristik" $\left(\text{etwa } \frac{vV_1}{CV_1} = \frac{1}{10}\right)$ wählt, der Raum zwischen **CE** und **GE** also im Vergleich zum Abstande des Centrums **C** von der Kollineationsebene sehr klein wird, einem wie immer ausgedehnten Gebilde im System **S** stets ein Gebilde S_1 entsprechen wird, welches zwischen **CE** und **GE** liegt, dessen Dimensionen in der Richtung der Kollineations- oder Sehstrahlen verhältnismässig klein sind.

Auf Grund dieser Prinzipien werden in der plastischen Kunst die sogenannten *„Reliefs"* hergestellt, d. s. Skulpturen von geringer Tiefe, welche räumliche Objekte von grosser Tiefenausdehnung möglichst naturgetreu veranschaulichen.

In Fig. 317, Taf. XXVI repräsentiert also das Tetraeder **ABCF** das Originalobjekt, während das dem **ABCF** kollineare Tetraeder $A_1B_1C_1F_1$ sein *„Relief"* oder seine *„Reliefperspektive"* darstellt.

Betrachtet man die Kollineationsebene und das Kollineationscentrum beziehungsweise gleichzeitig als Bildebene und Projektionscentrum, so folgt aus dem Umstande, dass je zwei entsprechende Punkte des Originales und seines Reliefs auf demselben Kollineations- oder Projektionsstrahle liegen, dass weiter diese Punkte eine und dieselbe Centralprojektion besitzen und

dass ferner, nachdem das Gleiche von jedem Paare entsprechender Punkte gilt, überhaupt zwei einander als Original und Relief entsprechende Gebilde, wie beispielsweise die beiden Tetraeder **ABCF** und $A_1B_1C_1F_1$, eine gemeinschaftliche Centralprojektion **abcf** besitzen.

Irgend eine beliebige Gerade $L = AB$ [Fig. 317, Taf. XXVI] und die derselben im Relief entsprechende Gerade $L_1 = A_1B_1$ treffen die Kollineationsebene **CE** in einem und demselben Punkte **d**, welcher offenbar zugleich der Durchstosspunkt der gemeinschaftlichen Centralprojektion $l = ab$ dieser beiden Geraden ist.

Die Fluchtpunkte der beiden als „Original und Relief" sich entsprechenden Geraden **L** und L_1 hingegen werden nicht zusammenfallen; da der dem Originale **L** entsprechende Fluchtpunkt **v** das Bild jenes Punktes V_1 der Geraden L_1 repräsentiert, welcher dem unendlich fernen Punkte **V** von **L** kollinear entspricht, also das Bild eines in der Gegenebene **GE** liegenden Punktes darstellt.

Um den Fluchtpunkt v_1 der Geraden L_1 zu erhalten, hat man den Schnitt der Bildebene **CE**, also auch den Schnitt der Geraden **l** mit dem zu L_1 parallelen Kollineationsstrahle Cv_1 zu bestimmen. Hierbei folgt aus den beiden ähnlichen Dreiecken Cvv_1 und V_1vd, dass:

$$\frac{vd}{v_1d} = \frac{vV_1}{Cv_1}$$

sei, dass also zwei einander als Original und Relief entsprechende Geraden eine gemeinschaftliche Centralprojektion und einen gemeinschaftlichen Durchstosspunkt jedoch verschiedene Fluchtpunkte besitzen, und dass das Verhältnis der Abstände dieser Fluchtpunkte vom Durchstosspunkte stets der Charakteristik der das Relief liefernden räumlichen Kollineation gleich sei.

Hiernach ist es höchst einfach, aus der gegebenen Centralprojektion eines Originalobjektes die Centralprojektion seines Reliefs abzuleiten, sobald das die Charakteristik darstellende Verhältnis gegeben ist.

Nehmen wir beispielsweise an, es sei als Original eine Pyramide **S(abcd)** [Fig. 318, Taf. XXVI] gegeben, deren Scheitel **S** auf dem Träger $\delta\varphi$ und deren Basis **abcd** in der Ebene E_vE_b liegt. Das Relief dieser Pyramide ist zu bestimmen und

centralprojektivisch darzustellen, wenn das Verhältnis $\frac{v\Delta}{v'\Delta}$ die Charakteristik repräsentiert.

Den vorausgeschickten Erörterungen gemäss ist $S(abcd)$ gleichzeitig auch das Bild der sich als Relief ergebenden Pyramide; ferner bleiben der Trägerdurchstosspunkt δ und die Bildflächtrace E_b, als der Bild- resp. Kollineationsebene angehörende Elemente, ungeändert. An Stelle von φ hingegen tritt der Punkt φ', wobei:

$$\frac{\varphi\delta}{\varphi'\delta} = \frac{v_1\delta}{v'_1\delta} = \frac{v\Delta}{v'\Delta}$$

ist. Stellt ferner $\varphi_1\delta_1$ eine beliebige Gerade der Ebene $E_v E_b$ vor, so ist deren Relief $\varphi'_1\delta_1$ ebenfalls durch die Bedingung:

$$\frac{\varphi_1\delta_1}{\varphi'_1\delta_1} = \frac{v_2\delta_1}{v'_2\delta_1} = \frac{v\Delta}{v'\Delta}$$

bestimmt. Die neue Fluchttrace ist sodann die zu E_b durch φ'_1 parallel geführte Gerade E'_v.

Als das Relief der ursprünglich gegebenen Pyramide $S(abcd)$ erhalten wir mithin eine zweite Pyramide, welche dasselbe Bild $S(abcd)$ besitzt, deren Scheitel jedoch auf dem Träger $\delta\varphi'$ und deren Basis in der Ebene $E_b E'_v$ liegt.

XXX. Kapitel.

b) Centralprojektivische Darstellung auf Grund der „perspektivischen Massstäbe“.

§ 430.

Handelt es sich darum, räumliche Gebilde, deren Hauptdimensionen sich in drei zu einander senkrechten Richtungen erstrecken, wie es beispielsweise bei technischen Objekten der Fall ist, centralprojektivisch darzustellen, so benützt man häufig besondere Konstruktionsmethoden, welche nunmehr den Gegenstand unserer Besprechung bilden sollen.

Der natürlichen Lage solcher Objekte entsprechend, setzt man die Bildebene in der Regel als vertikal voraus, und nimmt

das darzustellende Gebilde oder Objekt auf einer horizontalen, also zur Bildebene senkrechten Ebene, welche als „*Grundebene*" bezeichnet wird, aufruhend an. Ausserdem gilt für gewöhnlich die Regel, dass das darzustellende Objekt (mit Rücksicht auf ein im Projektionscentrum liegendes Auge gesprochen) hinter der Bildebene sich befinde.

Die eine Konstruktionsmethode, welche sich im allgemeinen nur auf die blosse Darstellung eines Objektes bezieht, beruht darauf, die Bilder aller seiner Punkte aus deren Koordinaten in bezug auf drei gegenseitig aufeinander stehende Ebenen abzuleiten.

Hierbei wird als eine dieser Ebenen unmittelbar die Bildebene selbst, als zweite die Grundebene $G_v G_b$ [Fig. 319, Taf. XXVI] und als dritte Ebene eine sowohl zur Bildebene, als auch zur Grundebene senkrechte Ebene $V_v V_b$, die sogenannte „*Vertikalebene*" angenommen.

Als Koordinatenachsen ergeben sich demgemäss: a) Die Schnittgerade G_b der Bildebene mit Grundebene, d. i. die „**X**-*Achse*" oder die „*Breitenachse*", (Breitenmassstab); b) die Schnittgerade der Grundebene $G_v G_b$ mit der Vertikalebene $V_v V_b$, welche, als senkrecht zur Bildebene, ihren Fluchtpunkt im Hauptpunkte **A** hat, und als „**Y**-*Achse*" oder die „*Längenachse*" (Längenmassstab) bezeichnet wird, und endlich c) die Schnittgerade V_b der Bildebene mit der Vertikalebene $V_v V_b$, welche man die „**Z**-*Achse*" oder die „*Höhenachse*" (Höhenmassstab) zu nennen pflegt.

Der den drei Ebenen und ebenso den drei Achsen gemeinschaftliche Punkt **O** ist der „*Ursprung*" des Koordinatensystems.

Sind nun die drei Koordinaten irgend eines Punktes im Raume, d. s. die „*Breite*" als Abstand des Punktes von der Vertikalebene $V_v V_b$; die „*Länge*" als Abstand des Punktes von der Bildebene und endlich die „*Höhe*" als Abstand desselben von der Grundebene bekannt, so lässt sich, wie leicht einzusehen, das Bild des genannten Punktes anstandslos konstruieren, wenn man die drei Koordinaten desselben auf den gleichnamigen Achsen aufträgt, und durch die Endpunkte der so abgeschnittenen Strecken beziehungsweise zu den vorbezeichneten Koordinatenebenen parallele Ebenen führt, oder, mit anderen Worten, zu den betreffenden Koordinatenachsen senkrechte Ebenen legt und deren Schnitt aufsucht. Der Schnittpunkt dieser drei Ebenen ist sodann das *Bild* des zu bestimmenden Raumpunktes.

Hat man aber eine grössere Anzahl von Punkten auf diese Weise zu bestimmen, so empfiehlt es sich, die drei Achsen gleichzeitig als Träger dreier Massstäbe, des *„Breiten-“*, *„Längen-“* und *„Höhenmassstabes“* zu wählen, d. h. von vornherein auf diesen Achsen, vom Ursprunge **O** aus, eine dem jeweiligen Zwecke entsprechende Längeneinheit wiederholt aufzutragen.

Nachdem die Breitenachse $\mathbf{X} = \mathbf{G}_b$ und die Höhenachse $\mathbf{Z} = \mathbf{V}_b$ in der Bildebene selbst liegen, so erscheint daselbst die als Längeneinheit gewählte *Masseinheit* in ihrer *wahren* oder *natürlichen* Grösse; es sind also auch die ihnen entsprechenden, mit den genannten Achsen zusammenfallenden Massstäbe „natürlich“, d. h. die einzelnen Teilpunkte 1, 2, 3, 4 . . . derselben stehen um die der Längeneinheit gleiche Strecke (in wahrer Grösse gemessen) voneinander ab.

Der Längenmassstab hingegen ist ein „perspektivischer Massstab“; es werden daher, infolge seiner zur Bildebene senkrechten Lage, die Bilder der einzelnen Teilpunkte um so näher aneinander rücken, die der Längeneinheit gleiche Strecken also um so kleiner sich darstellen, je weiter diese Punkte hinter der Bildebene fortschreiten.

Die Teilpunktbilder auf dem Längenmassstabe erhält man jedoch (§ 62) höchst einfach, indem man die Teilpunkte des Breitenmassstabes (oder auch des Höhenmassstabes) von dem in der Fluchttrace $\mathbf{G}_v$ (Horizontlinie) liegenden Distanzpunkte **D** [oder von dem in der Fluchttrace $\mathbf{V}_v$ (Vertikallinie) befindlichen Distanzpunkt $\mathbf{D}_1$] als *„Teilungspunkt“* der Geraden $\mathbf{OA} = \mathbf{Y}$ auf diese projiziert.

Nach dieser Vorbereitung bietet die Bildbestimmung irgend eines durch seine drei Koordinaten gegebenen Punktes keinerlei Schwierigkeiten.

Nehmen wir beispielsweise an, es sei der Punkt

$$\mathbf{b} = 3; \quad \mathbf{l} = 5; \quad \mathbf{h} = 4,$$

wobei **b**, **l**, **h** beziehungsweise die Breite, die Länge und die Höhe des Punktes bezeichnen, darzustellen, so hat man durch die bezüglichen Teilpunkte $\alpha = 3$, $\mathbf{o} = 5$ und $\beta = 4$ des Breiten-, Längen- und Höhenmassstabes drei Ebenen $\mathbf{e}_b^3$, $\mathbf{e}_l^5$, $\mathbf{e}_h^4$ zu legen, von welchen die erste $\mathbf{e}_b^3$ zur Vertikalebene, die zweite $\mathbf{e}_l^5$ zur Bildebene und die dritte $\mathbf{e}_h^4$ zur Grundebene parallel ist, um im Schnitte dieser drei Ebenen sofort das perspektivische Bild **a** des gesuchten, durch seine Koordinaten gegebenen Punktes zu erhalten.

Die beiden erstgenannten Hilfsebenen e_b^3 und e_l^5 schneiden die Grundebene beziehungsweise in der Geraden $\alpha A = A3$ und in der durch den Teilpunkt $5 = o$ des Längenmassstabes parallel zur Grundlinie $G_b = X$ geführten Geraden X'. Diese letztbezeichneten Geraden treffen sich ihrerseits in einem Punkte a', durch welchen die zur Höhenachse parallele Schnittgerade z der beiden vorgenannten Hilfsebenen e_b^3 und e_l^5 geht.

Der gesuchte Punkt a liegt sodann im Schnitte der Geraden z mit der dritten zur Grundebene parallelen Hilfsebene e_h^4, und kann auf mehrfache Weise erhalten werden.

Die Hilfsebenen e_b^3 und e_h^4 schneiden nämlich die Bildebene in den beziehungsweise zur Vertikalachse $V_b = Z$ und zur Grundlinie $G_b = X$ parallelen Geraden $a''3 = \alpha a''$ und $a''4 = \beta a''$, welche sich ihrerseits in dem Punkte a'' treffen. Die durch a'' senkrecht zur Bildebene geführte Gerade $a''A$ stellt offenbar den Schnitt der Hilfsebenen e_b^3 und e_h^4 vor, schneidet mithin die früher gefundene Gerade $a'z$ bereits in dem verlangten Punkte a. Oder man sucht den Schnitt $Z'5 = oZ'$ und $A4 = \beta A$ der beiden Hilfsebenen e_l^5 und e_h^4 mit der Vertikalebene $V_b V_v$. Die besagten Schnittgeraden treffen sich in dem Punkte a'''. Die durch a''' gehende horizontale Gerade $a'''a$, welche den Schnitt der obgenannten Hilfsebenen darstellt, liefert im Schnitte mit z gleichfalls den zu bestimmenden Punkt a.

Nebenbei sei noch bemerkt, dass, wie übrigens selbstverständlich, die Höhen- und Breitenkoordinaten eines Punktes in gleichen Entfernungen von der Bildebene gleichmässig verändert, hinter der Bildebene also in gleichem Masse verkürzt erscheinen. Hat man also beispielsweise in einer bestimmten Entfernung l hinter der Bildebene eine Breite b und eine gewisse Höhe $h = b$ aufzutragen, so wird man durch den Endpunkt von $l = Oo$ eine Parallele X' zu X führen, auf dieser die Strecke b mittels der zur Bildebene Senkrechten mA abschneiden, im Schnitte n mit X' die Parallele zu Z ziehen und auf dieser letzteren direkt die Strecke $on = b = h$ auftragen, um den verlangten Punkt dargestellt zu erhalten.

Sind Punkte eines räumlichen Gebildes darzustellen, deren Koordinaten so gross sind, dass man sie weder auf dem Breitenmassstabe noch auf dem Höhenmassstabe und daher auch nicht direkt auf dem Längenmassstabe auffinden resp.

abschneiden kann, so sieht man sich veranlasst von zweckentsprechenden Hilfskonstruktionen, die möglichst einfach zum Ziele führen, Gebrauch zu machen.

Beispielsweise könnte man den folgenden Vorgang wählen. Sei etwa der Punkt **P** [Fig. 319, Taf. XXVI], dessen Dimensionen

$$b = 14, \quad l = 17, \quad h = 18$$

sind, unter der Voraussetzung darzustellen, dass die diesen Zahlen entsprechenden Teilpunkte des **X**- und **Z**-Massstabes nicht mehr innerhalb der begrenzten Zeichnungsfläche liegen.

Da man vom Distanzpunkte **D** nach dem dermalen nicht vorhandenen Teilpunkt 17 des Breitenmassstabes **X** keinen Strahl mehr ziehen kann, so kann offenbar auch der besagte Punkt 17 auf dem Längenmassstabe nicht direkt aufgefunden werden.

Behufs seiner Konstruktion schaltet man daher einen verkürzten Breitenmassstab, beispielsweise den durch den Punkt $o = 5$ des Längenmassstabes gehenden horizontalen Träger oX' ein, und bestimmt auf diesem einen Teilpunkt, welcher der Differenz $17 - 5 = 12$ entspricht. Ermittelt man zu diesem Zwecke allenfalls den Teilpunkt $a' = 3'$ mittels des Strahles αA, trägt hierauf in der Entfernung $Oo = O5$ hinter der Bildebene das Stück $oa' = 53'$ auf X' noch dreimal bis $\pi' = 12'$ ab und projiziert man sodann π' von **D** aus nach π auf den Längenmassstab **Y**, so stellt $O\pi$ offenbar die centrale Projektion einer Strecke vor, welche 17 Längeneinheiten gleichkömmt. Es wird sonach π dem Teilpunkte 17 auf dem Längenmassstabe entsprechen.

Auf der durch $\pi = 17$ parallel zu $G_b = X$ gezogenen Geraden $\pi p'$ ist nun die Breite $b = 14$ des zu bestimmenden Punktes im Schnitte von $\pi p'$ mit dem von **A** nach dem Teilpunkte 14 des **X**-Massstabes (Breiten-Massstab) gezogenen Strahle festzustellen.

Nachdem dies aber im vorliegenden Falle direkt nicht möglich ist, bestimmt man beispielsweise auf $\pi p'$ zunächst allenfalls den Punkt $u = 7_1$ mit Hilfe des Strahles $A\gamma = A7$ und trägt die Strecke $\pi u = \overline{17, 7_1}$ von $u = 7_1$ nochmals bis p' auf, wodurch man in $\pi p'$ die Breite $b = 14$ des darzustellenden Punktes **P** in einer Entfernung $O\pi = 17$ hinter der Bildfläche erhält. Die Centralprojektion **p** des zu bestimmenden Punktes **P** liegt sodann auf dem durch p' (wobei p' die orthogonale Grundflächprojektion des zu ermittelnden resp. darzustellenden Raumpunktes **P** repräsentiert) vertikal gezogenen Strahle im Abstande $z'' = h = 18$ von p'.

Behufs dessen Bestimmung führen wir durch $\pi = 17$ die vertikale Gerade $z'' = \pi\omega$ und ermitteln auf derselben die Ordinate $h = \pi 18_1$. Zu diesem Zwecke suchen wir zunächst die Ordinate $\pi\delta_1 = \pi 6_1$ im Schnitte von $\pi\omega$ mit dem Höhenstrahle $\delta A = A6$ und finden hierauf durch weiteres zweimaliges Auftragen der besagten Strecke $\pi\delta_1 = \pi 6_1 = \frac{1}{3} h$ nach ω den Punkt $\omega = 18_1$. Die Horizontale durch ω und die Vertikale $p'p$ durch p' geführt geben sodann in ihrem Schnitte die gesuchte centrale Projektion p des Punktes P.

Diese Andeutungen dürften genügen, um zu zeigen, wie man durch zweckentsprechende Hilfskonstruktionen in bestimmten Fällen die Lage jedes beliebigen Punktes im Raume centralprojektivisch durch Zuhilfenahme der „perspektivischen Massstäbe“ feststellen könne.

XXXI. Kapitel.

c) Bestimmung perspektivischer Bilder räumlicher Gebilde, wenn behufs deren Feststellung die orthogonalen Projektionen derselben in bezug auf zwei zu einander senkrecht stehende Ebenen als gegeben vorliegen.

§ 431.

Um die diesbezüglichen Konstruktionen möglichst einfach zu gestalten, nehmen wir die Billdebene B_E unmittelbar mit der ursprünglich gegebenen vertikalen Projektionsebene, die Grundebene G_E mit der horizontalen Projektionsebene für die orthogonalen Projektionen zusammenfallend an und beziehen die Lage des Projektionscentrums im Raume auf die nämlichen Projektionsebenen, in bezug auf welche das räumliche Gebilde durch seine orthogonalen Projektionen festgestellt wurde. Den horizontalen Schnitt gg der Bildebene B_E (vertikale Projektionsebene) mit der Grundebene G_E (horizontale Projektionsebene) wollen wir wieder die Grundlinie (Projektionsachse XX) nennen.

§ 432.

Darstellung und Bestimmung des Punktes.

Es stelle B_E [Fig. 320, Taf. XXVI] die Bildebene, G_E die Grundebene, **C** irgend einen Punkt im Raume, (**c**, **c'**) dessen orthogonale Projektionen, **O** das Projektionscentrum (Auge) im Raume und (**A**, **O'**) dessen orthogonale Projektionen in bezug auf die nunmehrige Bild- und Grundebene B_E und G_E dar.

Denken wir uns durch **O** eine horizontale Ebene H_E „die Horizontal- oder Horizontsebene" gelegt, welche die Bildebene B_E in einer zur Grundlinie **gg** parallelen, also horizontalen Geraden **HH** „der Horizontal- oder Horizontslinie" schneidet, so liegt selbstverständlich die oberwähnte Projektion **A** des Centrums **O**, welche man bekanntlich den „Hauptpunkt" oder „Augpunkt" zu nennen pflegt, in der horizontalen Geraden **HH**. Die senkrechte Entfernung **AO** des Centrums **O** von der Bildebene B_E wird, wie aus Früherem bekannt, als „Augdistanz" oder kurz als „Distanz" bezeichnet.

Legt man weiter durch **AO** die „Vertikalebene" V_E (Kreuzriss- oder Profilebene), so bestimmt dieselbe im Schnitte mit der Bildebene B_E die durch **A** gehende „Vertikallinie" **VV**. Die zu B_E normale Gerade **AO** erscheint somit als die Durchschnittslinie der Horizonts- und Vertikalebene.

Es wird sich nun darum handeln, das Bild (die centrale Projektion oder die Perspektive) des Punktes **C** im Raume mit Zuhilfenahme seiner orthogonalen Projektionen (**c**, **c'**) eindeutig zu bestimmen.

Nachdem wir unter der centralen Projektion eines Punktes den Schnitt des durch denselben und durch das Centrum geführten Projektionsstrahles Σ mit der Bildfläche B_E verstehen, so wird man bloss durch **C** den Strahl $OC = \Sigma$ zu führen und dessen Durchstosspunkt c_p mit der Bildebene B_E aufzusuchen haben, um sofort das perspektivische Bild oder die Central-Projektion c_p des Punktes **C** zu erhalten.

Behufs vollkommner Bestimmung von **C** resp. c_p denken wir uns durch **OC** und den Hauptpunkt **A** eine Ebene **COA** gelegt. Die besagte Ebene wird selbstverständlich senkrecht zur Bildebene B_E stehen und diese letztere, da die Ebene **COA** auch die den Punkt **C** orthogonalprojizierende Gerade **Cc** enthält, in einer Geraden σ schneiden, welche durch **A** sowohl als auch durch **c** geht.

Dort wo die Verbindungsgerade **Ac** (welche nichts anderes als die Trace der Ebene **COA** oder die orthogonale Projektion σ des Strahles $\Sigma = OC$ auf die Bildebene B_E repräsentiert) vom Strahle **OC** getroffen wird, ergibt sich somit das perspektivische Bild c_p von **C**.

Hiernach liegen also der Hauptpunkt **A**, die vertikale oder Bildflächprojektion **c** des gegebenen Punktes **C** und dessen perspektivisches Bild c_p in einer und derselben Geraden.

Durch die Angabe von c_p allein ist jedoch die Lage des Punktes **C** im Raume noch nicht eindeutig bestimmt, da dem Bilde c_p noch jeder beliebige auf dem Strahle Oc_p liegende Punkt entsprechen kann.

Soll der Punkt **C** im Raume bestimmt sein, d. h. soll mit Zugrundelegung seiner perspektivischen Darstellung der Punkt **C** im Raume jederzeit wieder aufgefunden werden können, so wird zum Behufe seiner Fixierung noch ein zweites Bild desselben erforderlich sein.

Abgesehen von der Benützung des „Trägers" **Ac** (nach der Methode der allgemeinen Centralprojektion) kann zur Erreichung des besagten Zweckes sofort passend die orthogonale Projektion **c'** des Punktes **C** auf eine Horizontalebene, etwa auf die Grundebene G_E, gewählt werden.

Denkt man sich nämlich die orthogonale horizontale Projektion **c'** des Punktes **C** gleichsam als einen selbständigen in der Grundebene liegenden Punkt (dessen zugehörige vertikale Projektion γ demgemäss in der Grundlinie **gg** zu suchen ist), so wird man durch dieselbe Schlussfolge, die uns mittels des Projektionsstrahles $OC = \Sigma$ zur Kenntnis von c_p führte, nun auch (indem man den Schnitt des Strahles $Oc' = \Sigma_1$ mit der Bildebene B_E aufsucht) das perspektivische Bild c'_p des Grundrisses **c'** finden.

Man hat auf diese Weise zwei Strahlen $OC = \Sigma$ und $Oc' = \Sigma_1$, deren gemeinschaftliche Grundflächprojektion $\Sigma' \Sigma'_1$ durch die Gerade **O'c'm** dargestellt erscheint.

Während nun der durch **C** geführte Projektionsstrahl **OC** im Schnitte mit der Bildebene B_E das perspektivische Bild c_p des Punktes **C** im Raume gibt, wird der durch **c'** gehende Strahl $Oc' = \Sigma_1$ das perspektivische Bild c'_p des Grundrisses **c'** liefern.

Selbstverständlich werden auch diesfalls die Punkte **A**, γ und c'_p in einer und derselben Geraden $A\gamma c'_p = \sigma'$ liegen, indem letztere

wieder nur die orthogonale Bildflächprojektion σ' des Strahles $Oc' = \Sigma_1$ auf die Bildebene oder, was dasselbe ist, die Bildflächtrace σ' der durch OA und c' gelegten Ebene OAc' repräsentiert.

Denkt man sich ferner durch Cc' und das Centrum O eine Ebene COc' geführt, so wird die Grundflächtrace $O'c' = \Sigma'_1$ derselben mit der vorerwähnten gemeinsamen Grundfläch-Projektion Σ' der beiden Strahlen OC und Oc' zusammenfallen, während deren Bildflächtrace $c_p m c'_p$ durch die Verbindungsgerade der beiden perspektivischen Bilder c_p, c'_p und des Punktes m erhalten wird.

Selbstverständlich muss die Gerade $c_p m c'_p$ auf der Grundlinie gg senkrecht stehen, da dieselbe den Schnitt der grundflächprojizierenden Ebene OCc' (in welcher auch die Geraden Oc_p, Oc'_p, $O'm$ und Cc' liegen) mit der Bildebene B_E darstellt.

Es liegen somit das perspektivische Bild c_p eines Punktes C im Raume und das Bild c'_p seiner Grundflächprojektion in einer und derselben zur Grundlinie senkrechten Geraden.

Die eben angestellten einfachen Untersuchungen und die hieraus abgeleiteten Resultate bieten bereits die nötigen Behelfe, um aus vorliegenden orthogonalen Projektionen eines Punktes ohne weiteres die Perspektive desselben ableiten und bei der Konstruktion perspektivischer Bilder einen ganz ähnlichen Vorgang beobachten zu können, wie er bei der Bestimmung der Durchstosspunkte von Geraden mit den Projektionsebenen in orthogonaler Projektion befolgt wird.

Um die besagte Übereinstimmung vollkommen herzustellen, denken wir uns die Grundebene mit allen in ihr liegenden Punkten und Geraden um die Grundlinie gg so lange gedreht, bis dieselbe in die Bildebene gelangt. Hierbei wird selbstverständlich die relative Lage der einzelnen Punkte gegeneinander ungeändert bleiben und jeder Punkt einen Kreis beschreiben, dessen Ebene zur Drehungsachse gg senkrecht steht. Nach vollbrachter Drehung erscheint sonach O in O_1, c' in c'_1 und $O'c'$ resp. $O'm$ in $O_1 c'_1$ resp. $O_1 m$ dargestellt.

Auf die Zeichnungsfläche übergehend seien beziehungsweise c und c'; b und b' [Fig. 321, Taf. XXVI] die orthogonalen Bild- und Grundflächprojektionen der Punkte C und B im Raume. Es repräsentieren hiernach Ab und Ac die vertikalen oder Bildflächprojektionen der zu B und C gehörigen Projektionsstrahlen, in deren Durchstosspunkten mit der Bildebene B_E sich die perspek-

tivischen Bilder c_p und b_p vorfinden müssen, während $A\beta$ und $A\gamma$ die Bildflächprojektionen der den Punkten b' und c' entsprechenden Projektionsstrahlen; O_1b' und O_1c' aber die beiden um die Grundlinie gg in die Zeichnungsfläche niedergelegten Grundflächprojektionen der bezüglichen centralprojizierenden Strahlen (OC, Oc') und (OB, Ob') darstellen.

Nachdem es sich jedoch stets nur um den Schnitt der betreffenden Projektionsstrahlen mit der Bildebene B_E handelt, so hat man bekanntlich bloss die horizontalen Projektionen O_1b' und O_1c' derselben bis zur Grundlinie gg nach m und n zu verlängern und in den letztgenannten Punkten die Senkrechten auf die Grundlinie gg zu errichten, um sofort in den Schnittpunkten dieser letzteren mit den orthogonalen Bildflächprojektionen Ab und Ac der bezüglichen Strahlen OB und OC im Raume die perspektivischen Bilder b_p und c_p, dagegen im Schnitte der aus b_p und c_p zu gg gefällten Senkrechten mit den Bildflächprojektionen $A\beta$ und $A\gamma$ die perspektivischen Bilder b'_p und c'_p der Grundrisse b' und c' zu erhalten.

Nach diesen Erläuterungen läuft also, wie bereits oben angedeutet, die Lösung der gestellten Aufgabe einfach darauf hinaus, den Schnitt zweier, durch ihre orthogonalen Projektionen (Ab, $A\beta$, O_1b') und (Ac, $A\gamma$, O_1c') gegebenen Geraden (OB, Ob') und (OC, Oc') mit der Bildebene (vertikale Projektionsebene) zu bestimmen.

Denken wir uns endlich, zum Zwecke der Vereinfachung des Konstruktionsverfahrens, die Horizontalebene H_E um die Horizontallinie HH in die Bildebene hineingedreht, so gelangt das Centrum O [Fig. 320, Taf. XXVI] nach O_0, und es wird offenbar auch nach erfolgter Umlegung von H_E die Verbindungslinie der drei Punkte O_0, c' und c'_p eine Gerade $O_0c'_1c'_p$ geben, welche im Schnitte mit $A\gamma$ oder beziehungsweise mit c_pm die Perspektive c'_p der Grundflächprojektion c' liefern wird. (Man vergleiche Satz, § 53.)

Die eben besprochene Bestimmungsweise von c'_p kann auch gleichzeitig als Kontrolle für die Richtigkeit der erst angeführten Ermittelung des genannten Punktes dienen.

Bei den eben angestellten Betrachtungen und durchgeführten Konstruktionen wurde der darzustellende Punkt vor der Bildebene angenommen, doch ist es an und für sich klar, dass die Schlussfolge ebenso wie auch die Schlussresultate vollkommen

ungeändert bleiben, wenn der besagte Punkt hinter der Bildebene liegt, wie es aus der perspektivischen Darstellung (d_p, d'_p) [Fig. 321, Taf. XXVI] des Punktes (d, d') oder D (im Raume) deutlich hervorgeht.

§ 433.

Zweite Methode. Zu gleichen Resultaten wird man selbstverständlich auch dann gelangen, wenn man die projizierende Ebene OAc_p samt dem in ihr liegenden projizierenden Strahle Cc um die Bildflächtrace $A c c_p = \sigma$ nach $A c_p O_1$ [Fig. 322, Taf. XXVI] in die Bildebene umlegt, wobei $A O_1 = AO = A O_0$ (gleich der Distanz) und $cc_0 = Cc = \gamma c'$ (gleich der Entfernung des Punktes C im Raume von der Bildebene oder gleich der Entfernung $\gamma c'$ der Grundflächprojektion c' des Punktes C von der Grundlinie $g g$ ist.

Der Schnittpunkt des umgelegten Projektionsstrahles $O_1 c_0$ [Fig. 322, Taf. XXVI] mit der Bildflächtrace $Ac = \sigma$ wird selbstverständlich, da die relative Lage der einzelnen Punkte ungeändert blieb, dasselbe perspektivische Bild c_p von C wie vorher liefern müssen. Die Perspektive c'_p der Grundrissprojektion kann nun in gleicher Weise, wie an früherer Stelle besprochen wurde, in der Senkrechten $c_p m$ zur Grundlinie gg, und zwar im Schnitte von $c_p m$ mit $O_0 c'$ oder auch im Schnitte von $c_p m$ mit $A\gamma$ gefunden werden.

Das bei A rechtwinklige Dreieck Ac_pO pflegt man auch das *„Projektionsdreieck“* zu heissen.

Bei genauerer Betrachtung ist gleichzeitig ersichtlich, dass verschiedenen Lagen des darzustellenden Punktes im Raume auch ebenso verschiedene Lagen des Projektionsdreieckes entsprechen werden, dass jedoch, solange die Distanz AO dieselbe bleibt, der Scheitel O des bezeichneten Dreieckes stets in der Peripherie eines Kreises zu suchen sein wird, dessen Halbmesser der Distanz AO gleich ist.

§ 434.

Nachdem jedoch, wenn die Anzahl der darzustellenden Punkte eine grössere ist und man für jeden derselben die gleichen eben angedeuteten Operationen durchführen sollte, die Arbeit, abgesehen von den sich häufenden Konstruktionslinien, eine eintönige und

langwierige würde, dürfte es geboten erscheinen, ein abgekürztes Konstruktionsverfahren festzustellen resp. aufzufinden.

Letzteres ist höchst einfach zu erzielen, wenn man nicht vom wirklichen, für jeden einzelnen Punkt sich auf die angedeutete Weise ergebenden rechtwinkligen Projektionsdreiecke Gebrauch macht, sondern für alle perspektivisch darzustellenden Punkte eines Gebildes allenfalls sofort das umgelegte Centrum O_0 benützt und hiermit ein sogenanntes *„verändertes Projektionsdreieck“* einführt.

Statt nämlich das Dreieck c_pOA [Fig. 320, Taf. XXVI] um die Bildflächprojektion Ac_p des centralprojizierenden Strahles OC in die Bildebene B_E (Zeichnungsfläche) umzulegen, statt also Ac_p als Drehungsachse für das besagte Dreieck zu betrachten, denken wir uns die Distanz AO und parallel zu dieser auch gleichzeitig den orthogonal-bildflächprojizierenden Strahl Cc des Punktes C (bei unveränderter Länge der Strecken AO und $Cc = c'\gamma = \gamma c'_1$) in irgend eine beliebige zweckmässige Lage in die Bildebene B_E gebracht, und die so erhaltenen jeweiligen Endpunkte O_0 und c_0, O_1 und c_1, O_3 und c_3 . . . [Fig. 323, Taf. XXVII] geradlinig verbunden. Durch diese Geraden $O_0c_0, \ldots$ $O_3c_3 \ldots$ wird offenbar die unverändert gebliebene Bildflächprojektion $Acc_p = \sigma$ des Strahles OC stets in dem nämlichen Punkte c_p, d. i. dem perspektivischen Bilde von C, getroffen werden müssen.

Hierauf gestützt, wird man in der Folge die Verzeichnung des jedem einzelnen Punkte entsprechenden Projektionsdreieckes umgehen und für das in die Bildebene umgelegte Centrum jeden beliebig gewählten Punkt in jenem Kreise D_k annehmen können, dessen Radius R der Distanz d gleich ist. Besagter Kreis wird, wie aus Früherem bekannt, als „Distanzkreis“ bezeichnet.

Der Distanzkreis ist als der Basiskreis eines geraden Kreiskegels zu betrachten, dessen Radius gleich der Höhe des Kegels und gleich der Distanz d ist. Selbstverständlich muss bei einer einmal getroffenen Wahl des Punktes O [Fig. 323, Taf. XXVII] die jeweilig orthogonal projizierende Gerade Cc des perspektivisch darzustellenden Punktes C resp. (c, c') stets in eine zu der Verbindungsgeraden von A mit dem angenommenen Punkte O parallele Lage gebracht und dieser Parallelen eine Länge gegeben werden, welche der Entfernung des entsprechenden Punktes von der Bildebene oder, was dasselbe ist, dem Abstande $\gamma c'$ der Grund-

flächprojektion **c'** des Punktes (**c**, **c'**) von der Grundlinie **gg** gleichkömmt, um das verlangte perspektivische Bild c_p richtig bestimmt zu erhalten.

Um mit der möglichst geringen Zahl von Konstruktionslinien das gewünschte Resultat zu erreichen, wird man daher zweckmässig unmittelbar einen der in der Horizont- oder Vertikallinie liegenden Distanzpunkte **D** als das in die Bildebene umgelegte Centrum benützen, auf den durch die orthogonalen Bildflächprojektionen **c**, **b**, **e** . . . der gegebenen Punkte **C**, **B**, **E** . . . parallel zur Bildebene gezogenen Geraden die Abstände dieser Punkte von der Bildebene auftragen, und die so bestimmten Grenzpunkte mit dem gewählten Distanzpunkte geradlinig verbinden, um im Schnitte mit der Bildebene, resp. mit den zugehörigen orthogonalen Bildflächprojektionen **Ac**, **Ab**, **Ae**, . . . der Projektionsstrahlen die entsprechenden perspektivischen Bilder c_p, b_p, e_p . . . zu finden.

Nach diesen Auseinandersetzungen ist ferner klar geworden, dass, so wie **O** jede beliebige Lage O_0, O_1, O_2, O_3, **D** . . . [Fig. 322, Taf. XXVI und Fig. 323, Taf. XXVII] im Distanzkreis D_k annehmen kann, auch **c** eine ähnliche Lage c_0, c_1, c_2, c_3, **c** . . . in der Peripherie eines Kreises **k** einnehmen werde, oder wenn mehrere Punkte **c**, **b**, **e**, . . . gegeben wären, c_1 . . ., b_1 . . ., e_1 . . . in den Peripherien von Kreisen **k**, k_1, k_2 . . . liegen werden, deren Mittelpunkte beziehungsweise **c**, **b**, **e**, . . ., . . . sind, deren jeweilige Halbmesser cc_1 . . ., bb_1 . . ., ee_1 . . ., . . . ihrer Grösse nach der Entfernung der Punkte von der Bildebene B_E (Entfernung der orthogonalen Grundflächprojektion der einzelnen Punkte von der Grundlinie) gleichkommen und die ihrer Richtung nach mit jener der gewählten umgelegten Distanz AO_0, AO_1, . . . **AD** übereinstimmen.

Die auf diese Weise ermittelten Punkte c_1 . . ., b_1 . . ., e_1 . . ., mit dem jeweiligen Standpunkte des Centrums O_1 . . . verbunden, bestimmen jene Strahlen, deren Durchschnitte mit **Ac**, **Ab**, **Ae** . . ., resp. mit der Bildebene B_E, die perspektivischen Bilder von **B**, **C**, **E** . . . im Raume lieferten.

Die Perspektiven c'_p, b'_p, e'_p . . . des Grundrisses der einzelnen Punkte wird man, auf das an früherer Stelle ausführlich Besprochene gestützt, nunmehr anstandslos bestimmen können.

Liegt der Punkt (**f**, **f'**) [Fig. 324, Taf. XXVII] hinter der Bildebene B_E, so bleibt das eben besprochene allgemeine Verfahren selbstverständlich ganz und gar unverändert, nur hat man,

wenn vom Projektionsdreiecke Gebrauch gemacht wird, die Entfernung $Ff = of'$ des Punktes (f, f') von der Bildebene B_E (als in bezug auf das Centrum O und die Bildebene B_E entgegengesetzt gelegen), auch in entgegengesetztem Sinne von O auf die zu AO parallele Gerade (also beziehungsweise, je nachdem O_0, O_1, O_2, O_3 ... als das umgelegte Centrum benützt wird, von f nach f_1, f_2, f_3 ...) aufzutragen. Um die verlangte Perspektive f_p des Punktes $(f, f') = F$ zu erhalten, wird man wieder die Punkte f_1, f_2, f_3 ... beziehungsweise mit O_0, O_2, O_3 ... oder D ... zu verbinden und mit der Bildflächtrace $Af = \sigma$ der Ebene AOf zum Schnitte zu bringen haben.

§ 435.

Dritte Methode. a) Noch einfacher gestaltet sich die Lösung des Problemes „aus den gegebenen orthogonalen Projektionen die centralen Projektionen (Perspektiven) abzuleiten“, wenn man die ursprüngliche horizontale Projektionsebene (Grundebene) direkt mit der durch das Projektionscentrum geführten horizontalen Ebene, d. i. mit der Horizontalebene H_E zusammenfallend annimmt.

Der allgemeine Vorgang erleidet durch diese Annahme selbstverständlich keinerlei Beeinträchtigung, nur vermindert sich die Zahl der Konstruktions- und Hilfslinien, und wird somit die Gesamtdurchführung eine elegantere Gestalt annehmen. Ist nämlich, so wie in den vorhergehenden Fällen, B_E [Fig. 325, Taf. XXVII] die Bildebene, (OO') das Centrum, C der gegebene Punkt im Raume; stellt weiter die Horizontalebene H_E gleichzeitig die Grundebene und die Horizontallinie $HH = gg$ die Grundlinie vor, so wird, unter Berufung auf die vorausgeschickten Betrachtungen, der Punkt O mit seiner Grundflächprojektion O' zusammenfallen, $OC = \Sigma$ den centralprojizierenden Strahl des Punktes C, $O'c' = \Sigma'$ dessen Grundflächprojektion und $Ac = \sigma$ dessen Bildflächprojektion darstellen; ferner wird $O'm = O'c_p' = \Sigma'$ den centralprojizierenden Strahl des Punktes c' und gleichzeitig seine Grundflächprojektion, dagegen Ac_p' oder $A\gamma = \sigma'$ dessen Bildflächprojektion repräsentieren und hiernach das perspektivische Bild von C in c_p, das perspektivische Bild des Grundrisses c' hingegen in c_p' erhalten werden.

Durch Drehung, beziehungsweise Umlegung der Horizontalebene (Grundebene) in die Bildebene, gelangen wir zu ganz den-

selben Resultaten, wie sie bereits ausführlich in den vorhergegangenen Untersuchungen erörtert und festgestellt wurden.

b) Mit Zuhilfenahme des Projektionsdreieckes.

Denkt man sich die projizierende Ebene **COA**, des rechtwinkligen Dreieckes c_p**OA** [Fig. 325, Taf. XXVII] um die zugehörige Bildflächtrace $Ac_p = \sigma$ (orthogonale Bildflächprojektion des Strahles Σ) mit der in der genannten Ebene liegenden orthogonal-bildflächprojizierenden Geraden **Cc** in die Bildebene beziehungsweise nach $Ac_pO_1^0$ und cc_1^0 [Fig. 325 u. 326, Taf. XXVII] umgelegt und O_1^0 mit c_1^0 geradlinig verbunden, so wird sich im Schnitte des umgelegten Projektionsstrahles $O_1^0 c_1^0 c_p$ mit der Bildebene und der Trace $\sigma = Ac$ sofort die centrale Projektion c_p (Perspektive) und in der Senkrechten $c_p m = c_p c_p^{\prime}$ zur Grundlinie $HH = gg$ im Schnitte mit der letzteren die Perspektive $c_p^{\prime}$ der Grundflächprojektion ergeben.

Aus gleichen Gründen, wie an früherer Stelle nachgewiesen wurde, wird auch dann keine Störung in der Schlussfolge und in den sich ergebenden Resultaten eintreten, wenn man statt vom wirklichen Projektionsdreiecke $c_p OA$ von dem veränderten Projektionsdreiecke Gebrauch macht.

Selbstverständlich kann auch diesfalls jeder beliebige Punkt des Distanzkreises D_k (Fig. 327, Taf. XXVII) als das in die Bildebene umgelegte Auge oder Centrum **C** (in Übereinstimmung mit der im allgemeinen Teile des vorliegenden Werkes angenommenen Bezeichnung, wollen wir das Projektionscentrum (statt wie hier mit **O**) wieder durchweg mit **C** bezeichnen) angesehen werden.

Wie in § 434 auseinandergesetzt wurde, wird auch hier die orthogonal-bildflächprojizierende Gerade **Bb** des Punktes **B** (im Raume) durch eine Gerade dargestellt werden, welche durch die jeweilige Bildflächprojektion **b** des gegebenen Punktes **B** geht, parallel zur Verbindungsgeraden **CA** des Hauptpunktes **A** mit dem beliebig in D_k gewählten Punkte **C** läuft, und eine Länge besitzt, die der Entfernung **Bb** des Punktes **B** von der Bildebene oder, was dasselbe ist, dem Abstande $b'\beta$ der orthogonalen Grundflächprojektion **b'** von der Grundlinie **gg** gleichkommt. Zweckmässigerweise wird man jedoch im allgemeinen stets das um die Vertikal- oder Horizontallinie umgelegte Centrum **C** direkt benützen.

Liegt der Punkt $F = (f, f')$ hinter der Bildebene [Fig. 327, Taf. XXVII], so wird wieder bloss, nachdem das umgelegte Cen-

trum C in D_k zweckentsprechend gewählt ist, die orthogonal-bildflächprojizierende Gerade Ff des betreffenden Punktes nach entgegengesetzter Richtung von AC und parallel zu AC zu führen, auf derselben eine Strecke $ff_1 = Ff = \varphi f'$ aufzutragen und C mit f_1 geradlinig zu verbinden sein, um im Durchstosspunkte f_p von Cf_1 mit der Bildebene oder, was dasselbe ist, im Schnitte von Cf_1 mit der Bildflächtrace $\sigma = Af$ der entsprechenden projizierenden Ebene das perspektivische Bild f_p von F im Raume, und im Schnitte der Senkrechten $f_p\mu$ mit der Grundlinie $HH = gg$ die Perspektive f'_p der Grundflächprojektion f' bestimmt zu erhalten.

§ 436.

Perspektivische Darstellung der Geraden, wenn als Bestimmungsstücke derselben die orthogonalen Projektionen auf zwei zu einander senkrechten Ebenen vorliegen.

Ist die Gerade BC durch ihre orthogonalen Projektionen (bc, $b'c'$) [Fig. 328, Taf. XXVII] gegeben, so wird es, da eine Gerade durch zwei ihrer Punkte vollkommen bestimmt ist, genügen, die perspektivischen Bilder von zwei Punkten B und C der Geraden zu ermitteln, um sodann durch die geradlinige Verbindung der Perspektiven b_p und c_p der Punkte B und C (im Raume) die Perspektive b_pc_p der Geraden, und durch $b'_pc'_p$ die Perspektive der Grundflächprojektion der Geraden BC (im Raume) dargestellt zu erhalten.

Dass es gleichgültig ist, welcher der vorher angeführten Methoden man sich zur perspektivischen Bestimmung der einzelnen Punkte bedient, bedarf keiner besonderen Erklärung.

§ 437.

Spezielle Lagen von Geraden.

a) Die Gerade (bc, $b'c'$) [Fig. 329, Taf. XXVII) liegt in der Grundebene und steht senkrecht zur Bildebene.

Diesfalls fällt die Perspektive c_pb_p mit der Perspektive $c'_pb'_p$ der Grundflächprojektion zusammen, und wird die besagte Gerade (b_pc_p, $b'_pc'_p$), wenn das hier durch direkte Konstruktion erhaltene Resultat mit einem früher (§ 6) gefundenen in Verbindung gebracht wird, im Hauptpunkte A verschwinden.

Ähnliches gilt selbstverständlich von Geraden (fh, f'h') [Fig. 330, Taf. XXVII], die auf der Bildebene senkrecht stehen und folglich zur Grundebene parallel laufen.

Diesfalls werden zwar die Perspektive $h_p f_p$ und die Perspektive $h'_p f'_p$ des Grundrisses nicht mehr in eine und dieselbe Gerade fallen, beide perspektivischen Bilder werden aber im Hauptpunkte A verschwinden.

b) Liegt eine Gerade (de, d'e') [Fig. 331, Taf. XXVII] in der Grundebene selbst oder ist eine Gerade (kl, k'l') parallel zur Grundebene, so werden im ersteren Falle die Perspektive $d_p e_p$ und die Perspektive $d'_p e'_p$ der Grundflächprojektion in eine und dieselbe Gerade fallen, deren Lage selbstverständlich von der Neigung der gegebenen Geraden (de, d'e') gegen die Bildebene abhängig ist; im zweiten Falle dagegen wird ein Zusammenfallen der Perspektive $k_p l_p$ mit der Perspektive $k'_p l'_p$ der Grundflächprojektion zwar nicht mehr eintreten, aber in beiden Fällen werden sich die bezüglichen Perspektiven mit den zugehörigen Perspektiven der Grundflächprojektionen (hinreichend verlängert) in einem und demselben Punkte der Horizontallinie HH, d. i. in ihrem gemeinsamen Fluchtpunkte, begegnen.

Sind überdies die beiden Geraden (kl, k'l') und (de, d'e') [Fig. 331, Taf. XXVII] zu einander parallel, so werden, nach einer früher (§ 5 und 6) gefundenen Eigenschaft, deren Flucht- oder Verschwindungspunkte in dem nämlichen Punkte der Horizontallinie HH zu suchen sein.

Zu gleichem Resultate wäre man natürlich auch unmittelbar gekommen, wenn man direkt durch das Centrum (C, A) parallel zu den gegebenen Geraden (de, d'e'), (kl, k'l') Projektionsstrahlen geführt und ihre Durchstosspunkte mit der Bildebene B_E gesucht hätte.

Ein spezieller Fall horizontaler oder zur Grundebene paralleler Geraden wäre überdies noch jener, in welchem die besagte horizontale Gerade mit der Bildebene einen Winkel von 45° einschliesst.

Dies vorausgesetzt, werden sich die Perspektive und Perspektive der Grundflächprojektion einer solchen Geraden in einem Punkte (v, v') der Horizontallinie HH treffen, welcher vom Hauptpunkte A in einer der Distanz AC = d gleichen Entfernung liegt, also in einem Punkte (v, v'), welcher mit einem „Distanzpunkte“ zusammenfällt.

c) Ist eine Gerade (**ed**, **e'd'**) [Fig. 332, Taf. XXVII] senkrecht zur Grundebene und eine zweite (**bc**, **b'c'**) parallel zur Grundlinie, so wird im ersteren Falle die Perspektive $e_p d_p$ als eine zu ihrer orthogonalen Bildflächprojektion parallele Gerade, die Perspektive $e'_p d'_p$ der Grundflächprojektion aber als ein Punkt erscheinen; im zweiten Falle dagegen wird sich die Perspektive $b_p c_p$ als eine zur Perspektive $b'_p c'_p$ der Grundflächprojektion parallele Gerade darstellen, die beide gleichzeitig auch zu den untereinander parallelen orthogonalen Projektionen der gegebenen Geraden parallel laufen. Die Richtungen der Perspektiven stimmen also mit jenen der Geraden im Raume überein.

d) Liegt eine Gerade in der Bildebene oder ist sie bloss zur Bildebene parallel, so ist im ersteren Falle die Gerade ihr eigenes Bild, während die Perspektive ihrer Grundflächprojektion in der Grundlinie liegt; im zweiten Falle dagegen ist das perspektivische Bild parallel zur gegebenen Geraden im Raume und parallel zu ihrer orthogonalen Bildflächprojektion, die Perspektive ihrer Grundflächprojektion ist parallel zur Grundlinie.

e) Liegt endlich die Gerade in der Grundlinie, so fällt ihre Perspektive mit der Perspektive ihrer Grundflächprojektion und mit der gegebenen Geraden zusammen.

§ 438.

Um die Übereinstimmung der soeben gefundenen Resultate mit jenen der „freien Perspektive" darzuthun und den Weg anzubahnen, der uns die Überführung der Bestimmungsweise des Punktes, der Geraden u. s. w. „durch die Perspektive und die Perspektive der zugehörigen Grundflächprojektion" auf jene ermöglichen soll, wo beispielsweise die „Gerade" durch die Angabe ihres „Durchstosspunktes und Fluchtpunktes" als gegeben vorliegt, und weiter auch die Möglichkeit bieten soll, auf höchst einfache Weise aus der Perspektive einer Geraden u. s. w. die orthogonalen Projektionen derselben, und umgekehrt, sofort abzuleiten, um also kurz gesagt den *„Zusammenhang der angeführten Projektionsmethoden herzustellen"*, heben wir zunächst den [unter b) S. 437] bereits besprochenen speziellen Fall hervor, in welchem eine horizontale durch ihre orthogonalen Projektionen bestimmte Gerade als gegeben vorliegt.

Sind (cb, c' b') [Fig. 333, Taf. XXVII] die orthogonalen Projektionen einer Geraden CB (im Raume), ist ferner C das um die Horizontallinie HH in die Bildebene niedergelegte Centrum, A dessen orthogonale Bildflächprojektion (Hauptpunkt), und soll das perspektivische Bild der Geraden (cb, c' b') nach den beiden genannten Methoden bestimmt, resp. die eine Bestimmungsart durch die andere ersetzt werden, so kann, nachdem man allenfalls zunächst die Perspektive $c_p b_p$ und die Perspektive $c'_p b'_p$ der Grundflächprojektion ermittelt hat, durch die nachstehende höchst einfache Betrachtung das verlangte Ziel erreicht werden.

Bringen wir in Erinnerung, dass parallelen Geraden, auf dieselben Projektionsebenen bezogen, parallele Projektionen entsprechen, und dass wir unter dem Fluchtpunkte einer Geraden den Durchstosspunkt des durch das Centrum C parallel zu dieser Geraden geführten Strahles (Flucht- oder Parallelstrahl) mit der Bildebene oder mit anderen Worten: das Bild des unendlich fernen Punktes der Geraden verstehen, so werden offenbar dem durch das Centrum parallel zu CB geführten Strahle Projektionen entsprechen, die beziehungsweise durch die gleichfalls orthogonalen Projektionen C und A des Centrums auf die Horizontal- und Bildebene gehen und zu den betreffenden Projektionen b' c' und bc der Geraden auf die nämlichen Ebenen bezogen, parallel laufen.

Denken wir uns demgemäss durch C [Fig. 333, Taf. XXVII], als der orthogonalen Projektion des Centrums auf die Horizontalebene, in der letztgenannten Ebene eine Gerade Cv' parallel zu c' b' gezogen und durch A, als der Projektion des Centrums auf die Bildebene, eine Parallele Av zu cb geführt, so wird die besagte Parallele (Cv', Av) den der Geraden (cb, c'b') oder CB (im Raume) entsprechenden Parallel- oder Fluchtstrahl (f, f') darstellen.

Weiter repräsentiert aber $Av' = f$ auch den Fluchtstrahl der Bildflächprojektion $\gamma\beta$ des Grundrisses c' b'. Dort, wo nun die Bildflächprojektion $f = Av'$ des der Bildflächprojektion $\gamma\beta$ des Grundrisses c' b' entsprechenden Fluchtstrahles von der zugehörigen Grundflächprojektion $f' = Cv'$ des Fluchtstrahles getroffen wird, ergibt sich offenbar der Schnittpunkt des dem Grundrisse c' b' entsprechenden Parallel- oder Fluchtstrahles mit der Bildebene, also mit anderen Worten: die Perspektive v' der Grundflächprojektion des Fluchtpunktes der Geraden.

Nachdem ferner die Perspektive eines Punktes und die der Perspektive der Grundflächprojektion des nämlichen Punktes in einer und derselben zur Grund- oder Horizontslinie Senkrechten liegen, die besagte Perspektive **v** aber auch in der Bildflächprojektion **Av** des der Bildflächprojektion **cb** entsprechenden Fluchtstrahles **f** zu suchen ist, so wird das perspektivische Bild **v**, (da der letztgenannte Fluchtstrahl **Av** diesfalls mit der Horizontslinie **HH** und mit **Av'** in eine und dieselbe Gerade fällt) mit **v'** zusammenfallen.

Es wird sonach (**v**, **v'**) die Perspektive und die Perspektive der Grundflächprojektion des Fluchtpunktes der horizontalen Geraden (**cb**, **c'b'**) darstellen oder mit anderen Worten:

„Die Perspektive und die Perspektive der Grundflächprojektion einer horizontalen Geraden treffen sich in einem und demselben Punkte (**v**, **v'**) der Horizontslinie“ oder auch:

„Die Fluchtpunkte horizontaler Geraden liegen in der Horizontslinie“; ein Resultat, welches mit dem bereits anderweitig gefundenen in voller Übereinstimmung ist.

Behufs der perspektivischen oder centralprojektivischen Bestimmung der gegebenen Geraden (**cb**, **c'b'**) [Figur 333, Taf. XXVII] wird aber, wie bekannt, ausser der Angabe des Fluchtpunktes (**v**, **v'**) der Geraden noch ein zweiter Punkt derselben, als welchen man zweckmässig den Durchstosspunkt der Geraden mit der Bildebene wählt, bestimmt werden müssen.

Der besagte Durchstosspunkt (**d**, **d'**) kann auch aus den vorliegenden orthogonalen Projektionen (**cb**, **c'b'**) sofort ermittelt werden, und werden dessen Perspektive und Perspektive der Grundflächprojektion, als die Bilder eines Punktes der Bildebene, beziehungsweise mit **d** und **d'** d. i. mit der orthogonalen Bildfläch- und Grundflächprojektion des Punktes zusammenfallen.

Es ergibt sich sonach in der Verbindungslinie von **v** mit **d** die Perspektive (das Bild) **vd**, und von **v'** mit **d'** die Perspektive **v'd'** der Grundflächprojektion (oder das Bild des Grundrisses) der hinter die Bildebene ins Unendliche sich erstreckenden Geraden.

Ist die Gerade (**cb**, **c'b'**) begrenzt, so können die Perspektiven c_p und b_p der Grenzpunkte (**c**, **c'**) und (**b**, **b'**) unmittelbar durch die orthogonalen Bildflächprojektionen **Ac** und **Ab** der den

betreffenden Punkten entsprechenden Projektionsstrahlen bestimmt, und aus diesen die Perspektiven c'_p und b'_p der Grundflächprojektionen ohne weiteres abgeleitet werden.

§ 439.

Hat die durch ihre orthogonalen Projektionen gegebene Gerade irgend eine ganz allgemeine Lage im Raume, und soll aus der orthogonalen Projektion die Centralprojektion, (Perspektive) durch die üblichen Bestimmungsstücke einer Geraden d. i. durch die Angabe des Flucht- und Durchstosspunktes derselben, oder beziehungsweise durch Feststellung der Perspektive und der Perspektive ihrer Grundflächprojektion, abgeleitet werden, so unterliegt es nunmehr auch keinen weitern Schwierigkeiten der jeweilig gestellten Bedingung zu entsprechen, d. i. aus der einen Bestimmungsweise auf die andere zu übergehen, resp. aus der Perspektive einer Geraden die orthogonalen Projektionen derselben zu entwickeln.

Sind also (**cb**, **c' b'**), [Fig. 334, Taf. XXVIII], die orthogonalen Projektionen einer Geraden, und soll durch Zuhilfenahme dieser Bestimmungsstücke die Perspektive derselben ermittelt werden, so hat man wieder in ähnlicher Weise wie im vorhergehenden Falle durch das Centrum (**C**, **A**) eine Gerade „den Fluchtstrahl der Geraden“ parallel zu der gegebenen Geraden **CB** (im Raume) zu führen, und deren Durchschnittspunkt **v** mit der Bildebene B_E aufzusuchen.

Letzteres geschieht in der Zeichnungsfläche wieder dadurch, dass man durch **C**, als der orthogonalen Projektion des Centrums auf die Horizontalebene, eine Parallele **Cv'** zur horizontalen oder Grundflächprojektion **c' b'**, und durch **A**, als der orthogonalen Bildflächprojektion des Centrums, eine Gerade $Av = f$ parallel zur vertikalen oder Bildflächprojektion **cb** führt und den Schnitt **v** derselben mit der B_E durch dieselbe Schlussfolge bestimmt, welche im vorhergegangenen Falle (§ 438) zur Erreichung des gleichen Zweckes gebraucht wurde.

Ist **v** und **v'** ermittelt, (wodurch schon die Richtung der Geraden $CB = (cb, c'b')$ gekennzeichnet ist) so wird man, um das perspektivische Bild der gegebenen Geraden auf eine eindeutige Weise zu bestimmen, noch einen zweiten Punkt derselben feststellen müssen und als solchen zweckmässig ihren Durchstosspunkt **d** mit der Bildebene B_E wählen.

Nachdem der Punkt (**d**, **d'**), als in der Bildebene liegend, mit seinem eigenen Bilde zusammenfällt (die Perspektive der Grundflächprojektion **d'** liegt demzufolge in der Grundlinie), die perspektivischen Bilder desselben sich also beziehungsweise mit den orthogonalen Projektionen (**d**, **d'**) decken, wird man, um sofort die centralprojektivische oder perspektivische Darstellung der Geraden zu erhalten, bloss den Fluchtpunkt **v** mit **d** geradlinig zu verbinden haben.

Ist die Gerade (**cb**, **c'b'**) durch Zuhilfenahme der Grundebene, also mittels zweier Projektionsebenen, resp. durch zwei Bilder anzugeben, so wird diesfalls nur noch **v'** mit **d'** zu verbinden sein, um sofort in **v'd'** die Perspektive der Grundflächprojektion der ursprünglich durch **cb** und **c'b'** orthogonal bestimmten Geraden zu finden.

Sind schliesslich noch die Bilder der orthogonal-projektivisch gegebenen Grenzpunkte (**c**, **c'**) und (**b**, **b'**) der Strecke (**cb**, **c'b'**) festzustellen, so wird man bloss (§ 432) die Bildflächprojektionen **Ac** und **Ab** der Projektionsstrahlen bis zum Schnitte c_p und b_p mit der Geraden **dv** zu führen haben, um die Perspektiven c_p, b_p der besagten Punkte, und im Schnitte c'_p, b'_p der Senkrechten aus c_p und b_p zur Grundlinie **gg** mit **d'v'**, die Perspektiven der Grundflächprojektionen der obbezeichneten Punkte zu erhalten.

§ 440.

Ist umgekehrt a) die centrale Projektion oder das perspektivische Bild **dv** einer Geraden, und sind anderseits

b) das Bild **bc** und jenes **b'c'** ihres Grundrisses gegeben, so lassen sich in jedem dieser beiden Fälle anstandslos die orthogonalen Projektionen b_1c_1 und $b'_1c'_1$ der Geraden höchst einfach bestimmen.

Ist beispielsweise **dv** [Fig. 335, Taf. XXVIII] die Perspektive einer Geraden, sind ferner **b** und **c** zwei auf derselben liegende Punkte, und soll aus dieser Bestimmungsweise einerseits jene mittels der Grundebene, also die Bestimmung der Geraden durch ihre Perspektive und die Perspektive der Grundflächprojektion abgeleitet werden, und sind anderseits die orthogonalen Projektionen der besagten Geraden auf die Grund- und Bildebene aus **dv** zu entwickeln, so wird, mit bezug auf den vorhergehenden Fall, bloss der umgekehrte Weg einzuschlagen sein, um das gewünschte Ziel zu erreichen.

Dem Fluchtpunkte **v**, d. i. dem Durchstosspunkte des zugehörigen Fluchtstrahles **f** mit der Bildebene $\mathbf{B_E}$, entspricht zunächst der Punkt **v'** in der Horizontallinie als die ihm entsprechende Perspektive der Grundflächprojektion d. i. der Fluchtpunkt des Grundrisses der gegebenen Geraden.

Weiter ist die Perspektive **d'** der Grundflächprojektion des in der Bildebene liegenden Durchstosspunktes **d** in der Grundlinie zu suchen. Es wird sonach durch die Gerade **d' v'** die Perspektive der Grundflächprojektion der ursprünglich durch **dv** gegebenen (ins Unendliche hinter die Bildebene sich erstreckenden) Geraden dargestellt.

Die Bilder **b'** und **c'** des Grundrisses der auf **dv** liegenden Punkte **b** und **c** ergeben sich sofort im Schnitte der aus **b** und **c** auf **gg** gefällten Senkrechten mit **d' v'**.

Behufs Bestimmung der orthogonalen Projektionen der perspektivisch gegebenen Geraden **dv** wird man auf Grund vorausgeschickter Erörterungen nunmehr bloss **v** mit **A** und **v'** mit **C** geradlinig zu verbinden haben, um durch **Av** = **f** die orthogonale Bildflächprojektion des der Geraden zugehörigen Fluchtstrahles, in **Cv'** = **f'** die orthogonale Grundflächprojektion des dem Grundrisse derselben Geraden entsprechenden Fluchtstrahles, und somit in (**Av**, **Cv'**) auch die Richtungsgeraden für die bezüglichen orthogonalen Projektionen bestimmt zu erhalten.

Führt man durch (**d**, **d'**) d. i. durch jenen Punkt, der sowohl dem perspektivischen als auch dem orthogonalen Bilde der centralprojektivisch gegebenen Geraden **dv** angehört, Parallele zu dem durch (**f**, **f'**) = (**Av**, **Cv'**) fixierten Flucht- oder Parallelstrahl, so ergeben sich direkt in **l** und **l'** die verlangten orthogonalen Projektionen von **dv**.

Um die orthogonalen Projektionen ($\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c'_1}$) und ($\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b'_1}$) der auf **dv** gegebenen Punkte **c** und **b** festzustellen, wird man nur (§ 432) die orthogonalen Bildflächprojektionen $\mathbf{A c c_1}$ und $\mathbf{A b b_1}$ der betreffenden centralprojizierenden Strahlen zu ziehen haben, um sofort in $\mathbf{c_1}$ und $\mathbf{b_1}$ die bezüglichen vertikalen Projektionen, oder mit anderen Worten, die orthogonalen Bildflächprojektionen zu finden.

Wollte man zunächst die orthogonalen Horizontal- oder Grundflächprojektionen bestimmen, so würde man die Strahlen **Cc'** und **Cb'**, so wie jene **Ac'**γ und **Ab'**β zu führen und in γ und β die Senkrechten zu **gg** zu ziehen haben, um im Schnitte

c'_1 und b'_1 der letzteren mit **Cc'** und **Cb'** die orthogonalen Grundflächprojektionen der perspektivisch gegebenen Punkte **c** und **b** dargestellt zu erhalten.

Hiermit ist der Übergang von der einen Projektionsart auf eine andere klar gelegt und wird uns daher diese Überführung auch für die Folge keinerlei Schwierigkeiten bereiten.

Nicht selten tritt der Fall ein, dass der Fluchtpunkt einer durch ihre orthogonalen Projektionen gegebenen Geraden ausserhalb den Grenzen der Zeichnungsfläche fällt, oder auch deren Durchstosspunkt sich nicht direkt auf der Zeichenfläche ergibt, dennoch aber die perspektivischen Bilder der Geraden bestimmt werden sollen.

Setzen wir voraus, der Durchstosspunkt wäre noch auffindbar und in (**d**, **d'**), [Fig. 336, Taf. XXVIII], ermittelt worden. Es wird sich sonach bloss um die Bestimmung eines zweiten Punktes der Geraden handeln.

Hier wird man, da jeder Punkt als der Schnitt zweier Geraden aufgefasst werden kann, in Erwägung ziehen können, dass **A** der Fluchtpunkt aller Geraden sei, die senkrecht zur Bildebene B_E stehen, und dass der Distanzpunkt **D** der Fluchtpunkt von Geraden ist, welche mit der Bildebene B_E einen Winkel von 45° einschliessen.

Wählt man daher in der durch ihre orthogonalen Projektionen (**cb**, **c'b'**) [Fig. 336, Taf. XXVIII] gegebenen Geraden **CB** einen beliebigen Punkt (**x**, **x'**) und zieht durch diesen Punkt Geraden, welche die obigen Lagen besitzen, so wird man nur die Bilder x_p und x'_p (beziehungsweise die Perspektive und Perspektive des Grundrisses) von (**x**, **x'**) in der Weise zu bestimmen haben, dass man den bezeichneten Punkt (**x**, **x'**) als den Schnitt der besagten Geraden $\xi x'$ und $\eta x'$ betrachtet, ihre perspektivischen Bilder $A\xi$ und ηD aufsucht, und deren Schnittpunkt (x_p, x'_p) feststellt.

Die Verbindungsgerade von x_p mit **d** wird die Perspektive, und die Verbindungslinie $x'_p d'$ die Perspektive der Grundflächprojektion der Geraden liefern.

Zu erwähnen wäre hierbei noch, dass man unter Umständen, wie sie diesfalls als obwaltend vorausgesetzt wurden, im allgemeinen zuerst das Bild x'_p des Grundrisses **x'** aufsuchen wird, weil unter der Annahme, dass (**v**, **v'**) ausserhalb fällt, der zu wählende Punkt (**x**, **x'**) nahe der Horizontal- und Vertikallinie anzunehmen ist, die Verbindungslinie **xA** also die Gerade **cb** nicht selten unter

sehr spitzem Winkel schneidet, was offenbar die Genauigkeit der Konstruktion beeinträchtigt.

Man wird demgemäss etwa derart zu Werke gehen, dass man durch x' die zur Grundlinie Senkrechte $x'\xi$ und die unter 45° gegen die Bildebene geneigte Gerade $x'\eta$ führt, die Perspektiven $A\xi$ und $D\eta$ dieser Geraden $x'\xi$ und $x'\eta$ ermittelt und im Schnitte von $A\xi$ und $D\eta$ den Punkt x'_p d. i. die Perspektive der Grundflächprojektion des Punktes x' findet. Die Perspektive x_p ergibt sich dann sofort in der Senkrechten aus x'_p zu gg und in der Bildflächprojektion Ax des entsprechenden Projektionsstrahles, also im Schnitte x_p beider.

Selbstverständlich kann zur Erreichung desselben Zweckes auch die eine oder die andere der früher besprochenen Methoden benützt werden. — Die Verbindungsgeraden dx_p und $d'x'_p$ bestimmen die verlangten perspektivischen Bilder der orthogonal gegebenen Geraden ($c'b$, $c'b'$).

Benötigt man übrigens die Perspektive des Grundrisses gar nicht, oder treten die angeführten Übelstände nicht ein, so wird man anstandslos die Perspektive x_p mittels des durch x gehenden Projektionsstrahls direkt bestimmen können.

§ 441.

Gelegentlich der Betrachtung spezieller Lagen von Geraden wurde auch solcher Geraden Erwähnung gethan, die zur Bildebene B_E parallel sind, hierbei aber hervorgehoben, dass derartige Geraden, indem deren Durchstosspunkt d sowohl, als auch ihr Fluchtpunkt v in unendliche Ferne fallen, durch die in der Perspektive übliche Darstellungsweise einer Geraden nicht direkt bestimmbar seien, und folglich nach einem Mittel resp. einer Methode gesucht werden müsse, die es auf eine einfache Weise ermöglicht „zur Bildebene parallele Gerade“ festzustellen.

Hierzu bieten einerseits die „Angabe der Perspektive ihrer Grundflächprojektion“ und anderseits (§ 31) der Umstand „irgend einen Punkt auf einer Geraden eindeutig fixieren zu können“, die Mittel zur Erreichung des besagten Zweckes.

Wir wollen diese beiden Bestimmungsweisen vereinigt zum Ausdrucke bringen und diesbezüglich annehmen, dass CB (im Raume) eine zur Bildebene parallele Gerade vorstelle.

Das perspektivische Bild **cb** [Fig. 337, Taf. XXVIII] derselben wird als Schnitt der centralprojizierenden Ebene **CBC** mit der Bildebene **B_E** erhalten. Da jedoch die besagte Gerade **CB** hierdurch noch nicht vollkommen bestimmt erscheint, indem dem Bilde **cb** jede in der Ebene **CBC** liegende Gerade entspricht, bestimmen wir zunächst auch noch deren Grundflächprojektion **C' B'** (letztere ist offenbar zur Grundlinie **gg** parallel) und leiten aus dieser das Bild **c' b'** des Grundrisses (indem wir den Schnitt der centralprojizierenden Ebene **C' B' C** mit **B_E** aufsuchen) ab. Selbstverständlich wird auch **c' b'** parallel zu **C' B'** und folglich auch parallel zu **gg** sein.

Es ist nun an und für sich klar, dass die Gerade **CB** durch die Angaben von (**cb**, **c' b'**) eindeutig bestimmt sei, und dass folglich kein Zweifel über die Lage der Geraden **CB** im Raume obwalten könne.

Ebenso sicher und geeignet erweist sich die Bestimmung der zur Bildebene parallelen Geraden durch die Feststellung irgend eines Punktes, welcher der Geraden selbst angehört.

Ist nämlich **P** [Fig. 337, Taf. XXVIII] ein willkürlich gewählter Punkt auf der Geraden **CB** im Raume und **T** ein beliebiger Träger (dieser kann, der Einfachheit wegen, selbstverständlich auch senkrecht zur Bildebene angenommen werden) desselben, so wird, wie an und für sich klar, die Perspektive **p** des Punktes **P** einerseits auf der Perspektive **cb** der Geraden **CB**, anderseits aber auch auf der Perspektive **vd** = **t** des Trägers **T**, also im Schnitte beider liegen.

Da man durch **d** nur eine einzige Gerade parallel zum Fluchtstrahle **Cv**, weiter durch **p** und **C** nur eine einzige Gerade **Cp** führen kann, welche **T** in **P** schneidet, und da man endlich in der durch **Ccb** bestimmten centralprojizierenden Ebene durch **P** wieder nur eine einzige Gerade zur Bildebene parallel zu legen vermag, welche offenbar mit der gegebenen Geraden **CB** (im Raume) zusammenfallen muss, so ist auch nachgewiesen, dass diese Art der Bestimmung „einer zur Bildebene parallelen Geraden" eine eindeutige und eine ganz geeignete sei.

Zum Behufe der Kontrolle, sowie zum Zwecke der Überführung von einer Darstellungsmethode auf eine andere, wurden überdies auch die Grundflächprojektionen **C' B'**, **T'** und **P'** [Fig. 337, Taf. XXVIII] des Trägers **T** und des Punktes **P**, sowie die Perspektiven **c' b'**, **t'** = **v' d'** und **p'** dieser Grundflächprojektionen

ausgemittelt und mit den vorher bestimmten Perspektiven **cb**, $t = vd$ und **p** in Einklang gebracht. Weiter wurden auch beide Darstellungsweisen vereinigt in der Zeichnungsfläche vergegenwärtigt.

Eine weitere besondere Lage einer Geraden, die wir an dieser Stelle noch zur Sprache bringen wollen, ist die, wenn die besagte „Gerade verlängert durch das Projektionscentrum geht".

In diesem speziellen Falle fällt das Bild **cb** [Fig. 338, Taf. XXVIII] der Geraden **CB** (im Raume) mit ihrem Durchstosspunkte **d** und ihrem Fluchtpunkte **v** in einen einzigen Punkt zusammen, erscheint somit, wenn ihre Grenzpunkte **C** und **B** anzugeben, beziehungsweise aus den Angaben ihrer Perspektiven **c** und **b** räumlich wieder aufzufinden sind, nicht hinreichend bestimmt.

Es werden daher auch diesfalls ähnliche Hilfsmittel wie im vorher besprochenen Falle angewendet werden müssen, um der Anforderung „die begrenzte, centralprojizierende Gerade **CB** vollkommen zu bestimmen" Genüge zu leisten.

Zu dem besagten Zwecke können wir entweder zunächst die Gerade **CB** durch ihre Perspektive **cb** und ihre Perspektive **c'b'** der Grundflächprojektion (welche als in der grundflächprojizierenden Ebene **CC'C'C** liegend, senkrecht zur Grundlinie **gg** erscheint) darstellen, oder wir werden die gegebene Gerade dadurch perspektivisch bestimmen, dass wir durch jeden der beiden Grenzpunkte **C** und **B** je eine Gerade T_1 und T_2 als Träger der betreffenden Punkte führen und diese perspektivisch durch $d_1 v_1 = t_1$ und $d_2 v_2 = t_2$ darstellen.

Würde man nebstbei, wie oben bemerkt, von der Grundebene Gebrauch machen, demgemäss die Grundflächprojektion **C'B'** der Geraden, die Grundflächprojektionen T'_1 und T'_2 der Träger der Punkte **C** und **B** feststellen und daraus die bezüglichen Perspektiven $c'b'$, $t'_1 = v'_1 d'_1$ und $t'_2 = v'_2 d'_2$ ableiten, so muss selbstverständlich t'_1 durch die Perspektive c' des Grundrisses C', dagegen t'_2 durch b' gehen und müssen überdies, bei richtiger Konstruktion, beziehungsweise v'_1 (in der Horizontallinie) und v_1; v'_2 und v_2; d' (in der Grundlinie) und d_1; d'_2 und d_2 in je einer Geraden liegen, welche senkrecht zur Grundlinie **gg** resp. zur Horizontallinie **HH** steht.

Wie dieser einfachen Erörterung leicht zu entnehmen, wird somit auch in diesen Fällen der Übergang von einer Darstellungs- oder Bestimmungsweise auf eine andere, und folglich auch die Überführung der Perspektive auf die orthogonale Projektion und umgekehrt anstandslos ermöglicht.

§ 442.

Ist ein Punkt **P** perspektivisch durch Angabe seines Bildes **p** [Fig. 339, Taf. XXVIII] auf dem Träger $t = vd$ gegeben und sollte derselbe durch seine Perspektive und die Perspektive seiner Grundflächprojektion oder endlich durch seine orthogonalen Projektionen (p_1, p'_1) bestimmt werden, so wird man, um der ersten Anforderung zu genügen, zunächst die Perspektive $t' = v'd'$ der Grundflächprojektion des Trägers **T** (im Raume) ermitteln und aus **p** die Senkrechte **pn** zur Grundlinie **gg** ziehen, um sofort im Schnitte von **pn** mit **v'd'** die Perspektive **p'** des Grundrisses des gegebenen Punktes zu erhalten.

Um die orthogonalen Projektionen p_1 und p'_1 des perspektivisch durch **p** auf **vd** dargestellten Punktes **P** zu finden, hat man zu bedenken, dass die orthogonale Bildflächprojektion des betreffenden Punktes einerseits in einer durch **P** (im Raume) senkrecht zur Bildebene gefällten Senkrechten (welche perspektivisch durch **pA** dargestellt erscheint) liegen müsse, anderseits aber auch in der orthogonalen Projektion des Trägers $t = vd$ zu suchen sei.

Zum Behufe der Bestimmung der besagten orthogonalen Projektion (p_1, p'_1) ermitteln wir die orthogonalen Projektionen **Cv'** und **Av** des der Geraden **vd** entsprechenden Fluchtstrahles (**f**, **f'**), führen durch **d** beziehungsweise durch **d'** die zu $f = vA$ und $f' = v'C$ Parallelen $d\lambda$ und $d'\lambda'$ (d. h. die orthogonalen Projektionen des Trägers **vd**), so wird sich im Schnitte von **Ap** mit $d\lambda$ die orthogonale Bildflächprojektion p_1, und im Schnitte von $p_1 m$ mit $d'\lambda'$ oder beziehungsweise im Schnitte von **Cp'** mit $d'\lambda'$ die verlangte orthogonale Grundflächprojektion p'_1 des Punktes **P** ergeben.

§ 443.

Perspektivische Darstellung der Ebene, wenn dieselbe nach der orthogonalen Projektionsmethode durch die Vertikal- oder Bildflächtrace und durch die Horizontal- oder Grundflächtrace gegeben vorliegt.

Nachdem es sich hierbei bloss um die perspektivischen Bilder von Geraden handelt, die beziehungsweise in der Bild- und Grundebene liegen, wird sich die Lösung des gestellten Problemes höchst einfach gestalten.

Die Bildflächtrace E_b [Fig. 340, Taf. XXVIII] fällt, als eine in der Bildebene liegende Gerade, mit ihrem perspektivischen Bilde zusammen, repräsentiert also gleichzeitig die Bildflächtrace E_b der Ebene E in centralprojektivischer oder perspektivischer Darstellung.

Sucht man das Bild der Grundrisstrace E_g, welch letztere, als Schnitt der gegebenen Ebene E mit der Grundebene G_E, eine horizontale Gerade ist, so hat man bloss in Erwägung zu ziehen, dass der Fluchtpunkt v einer solchen Geraden in der Horizontallinie HH liegt, und dass man, um diesen zu erhalten, durch das Centrum C eine Parallele Cv (Grundflächprojektion f' des der Geraden E_g entsprechenden Fluchtstrahles) zu E_g zu führen und deren Schnittpunkt (v, v') mit der Bildebene zu bestimmen habe.

Nachdem weiter der Punkt σ, in welchem E_g die Grundlinie gg trifft, sein eigenes Bild, als auch das seiner Grundflächprojektion ist, so wird (v, v') mit σ geradlinig verbunden das Bild E'_g des Grundrisses E_g oder die Perspektive der Grundrisstrace der Ebene E liefern.

Zu gleichem Resultate könnte man auch dadurch gelangen, dass man die Perspektiven x_p und y_p zweier beliebiger in der Grundrisstrace E_g liegender Punkte (x, x') und (y, y') bestimmt, und die besagten Punkte x_p und y_p — da die Perspektive einer Geraden E_g in bezug auf eine Ebene als Bildfläche nur wieder eine Gerade E'_g sein kann — miteinander verbindet. Selbstverständlich liegen sodann (v, v'), (σ, σ'), x_p und y_p in einer und derselben Geraden E'_g.

Da jede Ebene E in der Perspektive, wie im Früheren darauf hingewiesen wurde, durch ihre Bildflächtrace E_b und durch ihre Verschwindungslinie oder Fluchttrace E_v bestimmt zu werden

pflegt, so wird es sich auch darum handeln, aus den gegebenen Bestimmungsstücken E_b und E_g die letzteren, d. i. E_b und E_v abzuleiten.

Denkt man sich zu diesem Behufe beliebige Geraden, von welchen eine E_g selbst sein mag, in der gegebenen Ebene (E_b, E_g) [Fig. 340, Taf. XXVIII] gezogen und durch das Projektionscentrum **C** Parallele zu diesen Geraden geführt, so werden diese die Bildebene in den den Geraden zugehörigen Fluchtpunkten treffen.

Nachdem aber ferner all die ersterwähnten Geraden in einer und derselben Ebene $E = (E_b, E_g)$ liegen, so wird dasselbe auch von den hierzu parallelen Geraden gelten, woraus weiter folgt, dass auch die durch die besagten Parallelen geführte Ebene die Bildebene in einer Geraden schneiden werde, welche die Verbindungslinie oder den Ort der Fluchtpunkte aller in der Ebene **E** liegenden Geraden darstellen wird.

Diese Durchstosspunkte aller durch das Centrum **C** parallel zu **E** geführten Geraden bestimmen folglich wieder eine Gerade E_v, welche [da die Schnitte E_b und E_v zweier paralleler Ebenen mit einer und derselben dritten Ebene (der Bildebene) untereinander parallel sind] zur Bildflächtrace E_b parallel sein muss.

Da ferner die Grundflächtrace E_g gleichfalls eine in der Ebene $E_b E_g$ liegende Gerade darstellt, diese aber als horizontale Gerade in der Horizontallinie im Punkte (v, v') verschwindet, so wird, da bei bekannter Richtung einer Geraden die Angabe eines Punktes derselben genügt, bloss durch v eine Gerade parallel zu E_b zu führen sein, um sofort die Fluchtlinie E_v der Ebene **E**, d. i. die Bildflächtrace der durch das Projektions-Centrum zur gegebenen Ebene $E_b E_g$ parallel geführten Ebene (Flucht- oder Parallelebene) zu erhalten.

Es kann demnach eine Ebene **E** als perspektivisch bestimmt betrachtet werden, wenn man entweder die Geraden E_b' und E_g' (Bildflächtrace und Perspektive der Grundflächtrace) oder, wenn man (sobald die Lage des Centrums fixirt ist) E_b und E_v (Bildflächtrace und Fluchttrace) derselben kennt.

Dass man nun auch umgekehrt, wenn die Ebene perspektivisch bestimmt vorliegt, dieselbe ohne jedwede Schwierigkeit nach der in der orthogonalen Projektionsmethode üblichen Darstellungsweise bestimmen, beziehungsweise in diese überführen könne, ist nun an und für sich klar.

§ 444.

180. Aufgabe: **In orthogonaler Projektion ist eine Ebene $E_b E_g$ und in derselben ein Punkt durch seine Projektionen (a, a') gegeben; es sind die Ebene sowohl als auch der in ihr liegende Punkt perspektivisch darzustellen.**

Die Bildflächtrace E_b [Fig. 341, Taf. XXVIII] der Ebene E bleibt (als ihr eigenes Bild) ungeändert, während die Perspektive E'_g der Grundrisstrace E_g sowohl, als auch die Fluchttrace E_v (vorausgesetzt, dass die Überführung des Gegebenen auch in die „freie Perspektive" zu geschehen habe) mit Zugrundelegung des Vorausgeschickten anstandslos bestimmt werden kann, so zwar, dass wir schliesslich die Ebene $E = (E_b, E_g)$ beziehungsweise durch E_b und E'_g oder durch E_b und E_v dargestellt annehmen können.

Denkt man sich, um einen Anhaltspunkt für die perspektivische Bestimmung des in der Ebene E liegenden, orthogonal gegebenen Punktes (a, a') zu haben, durch (a, a') irgend eine Gerade in der Ebene E, etwa $(ad, a'd')$ parallel zur Bildebene B_E, gezogen, so wird bekanntlich deren vertikale Projektion ad parallel zur Bildflächtrace E_b, deren Grundflächprojektion $a'd'$ dagegen parallel zur Grundlinie gg sein.

Ermittelt man die Perspektiven a_p und d_p, sowie die Perspektiven a'_p und d_p der Grundflächprojektionen von (a, a') und (d, d'), so muss nach Früherem $a_p d_p$ parallel zu ad resp. parallel zu E_b und $d_p a'_p$ parallel zu gg, resp. parallel zu $a'd'$ sein. Nachdem aber der Punkt (d, d') in der Grundebene, beziehungsweise in der Grundrisstrace E_g selbst liegt, so muss sich dessen Perspektive (welche, als einem in der Grundebene liegenden Punkte angehörend, mit der Perspektive seiner Grundrissprojektion zusammenfällt) in der Perspektive E'_g der Grundrisstrace vorfinden; es werden sich daher die Perspektiven $a_p d_p$ und $a'_p d_p$ in einem Punkte d_p der E'_g schneiden müssen.

Hieraus folgt unmittelbar, dass, wenn allenfalls die Perspektive a'_p [Fig. 341, Taf. XXVIII] der Grundrissprojektion a' eines Punktes nebst der Ebene $E_b E'_g$ gegeben ist und der besagte Punkt mittels einer in der Ebene $E_b E'_g$ liegenden zur Bildebene und folglich zur Bildflächtrace parallelen Geraden so zu bestimmen wäre, dass er in der bezeichneten Ebene $E_b E'_g$ liegt, man einfach durch a'_p eine Gerade $a'_p d_p$ parallel zur

Grundlinie gg so weit zu führen habe, bis sie E'_g in d_p schneidet, und durch den so erhaltenen Punkt d_p eine Gerade $d_p a_p$ parallel zu E_b ziehen und mit der in a'_p auf die Grundlinie errichteten Senkrechten zum Schnitte bringen müsse, um in a_p die Perspektive des den gestellten Anforderungen entsprechenden Punktes (a_p, a'_p) zu erhalten.

Das eben erzielte Resultat berechtigt gleichzeitig zu dem Schlusse, dass man „im Schnitte der Perspektive einer Geraden mit der Perspektive ihrer Grundflächprojektion stets einen Punkt der Perspektive der Grundflächtrace einer durch diese Gerade geführten Ebene", oder mit anderen Worten, die „Perspektive der Grundflächprojektion des Durchstosspunktes einer Geraden mit der Grundebene" findet.

Nachdem das Gleiche von jeder Geraden der Ebene $E_b E'_g$ gilt, und nachdem ferner die Perspektive eines Punktes und jene seines Grundrisses stets in einer zur Grundlinie senkrechten Geraden liegen, so folgt (§ 196), dass die Perspektive eines ebenen Gebildes und die Perspektive seines Grundrisses *„affine"* Gebilde sind, wobei die Perspektive der Grundflächtrace die *„Affinitätsachse"*, und die Senkrechten zur Grundlinie die *„Affinitätsstrahlen"* repräsentieren.

Wollte man nach der Methode der freien Perspektive anzeigen, dass der gegebene Punkt (a, a') in der Ebene $E_b E_v$ liegt, so hat man offenbar nur durch a_p irgend eine Gerade l zu ziehen, die in der besagten Ebene liegt, also durch a_p eine Gerade zu führen, deren Fluchtpunkt v_1 in der Fluchttrace E_v und deren Durchstosspunkt d_1 in der Bildflächtrace E_v der Ebene E gelegen ist.

Hätte man den Punkt (a, a') [Fig. 342, Taf. XXVIII] in der Ebene $E_b E_g$ durch eine in dieser Ebene liegende zur Grundebene parallele Gerade bestimmt, deren orthogonale Projektionen $ad = l$ und $a' d' = l'$, also beziehungsweise zur Grundlinie gg und zur Horizontal- oder Grundrisstrace Eg parallel sind, so bleibt der Vorgang, wenn es sich um die Bestimmung der perspektivischen Bilder E'_g, (l_p, l'_p) handelt, ein ähnlicher wie im vorhergehenden Falle, nur werden selbstverständlich die Geraden E_g und (l, l') als parallele horizontale Geraden einen gemeinschaftlichen, in der Horizontallinie HH liegenden Flucht-

punkt (v, v') besitzen, welcher gleichzeitig ein Punkt der Fluchttrace E_v der Ebene E ist.

Führt man demgemäss durch a und α die orthogonalen Bildflächprojektionen $Aa = \sigma'$ und $A\alpha = \sigma$ der den gegebenen Punkt (a, a') central projizierenden Strahlen und bestimmt man den Schnittpunkt a'_p von $A\alpha$ mit Ca', so erhält man in demselben die Perspektive a'_p des Grundrisses a' und im Schnitte der Senkrechten aus a'_p zu gg mit l_p die Perspektive a_p des orthogonal gegebenen Punktes (a, a').

Selbstverständlich müssen nun die Verbindungsgeraden $d\alpha_p = l_p$, $d'a'_p = l'_p$ und die gefundene Perspektive E'_g der Grundflächtrace E_g nach dem gemeinschaftlichen Fluchtpunkte (v, v') gerichtet sein.

Nebenbei sei bemerkt, dass das letztere Verfahren, „die Perspektive eines Punktes aus seiner orthogonalen Projektion abzuleiten“ als Kontrolle für die Richtigkeit des ersterwähnten Vorganges und umgekehrt benützt werden kann.

§ 445.

181. Aufgabe: **In einer perspektivisch durch die Bildfläch- und Fluchttrace E_b und E_v bestimmten Ebene E ist eine Gerade $vd = l_p$ und auf derselben ein Punkt a_p der Ebene E gegeben, es sind einerseits die Perspektiven der Grundflächprojektionen und anderseits die orthogonalen Projektionen der gegebenen Bestimmungsstücke festzustellen.**

Um zunächst die Perspektive E'_g [Fig. 343, Taf. XXIX] der Grundflächtrace E_g zu finden, wird man bloss den Punkt v'_1, in welchem die Fluchttrace E_v die Horizontallinie HH trifft, mit dem Punkte σ, in welchem die Bildflächtrace E_b (welche als ihr eigenes Bild unverändert bleibt) die Grundlinie gg schneidet, zu verbinden haben.

Nachdem ferner die Perspektive v' der Grundflächprojektion des Fluchtpunktes v der Geraden $vd = l_p$ in der Horizontallinie sich vorfindet und jene d' des Durchstosspunktes d, als Punkt der Bildebene, in der Grundlinie gg liegt, so erscheint die Perspektive l'_p der Grundflächprojektion durch $v'd' = l'_p$ und die Perspektive a'_p der Grundflächprojektion des durch seine Perspektive a_p auf vd gegebenen Punktes durch den Schnitt der aus a_p zu gg gefällten Senkrechten mit l'_p dargestellt.

Selbstverständlich werden sich l_p und l'_p in einem Punkte d_g der E'_g treffen müssen.

Behufs Bestimmung der orthogonalen Projektionen von E'_g, (l_p, l'_p) und (a_p, a'_p) wird es sich bloss um die Auffindung der den einzelnen Geraden entsprechenden Fluchtstrahlen, beziehungsweise um die Projektionen derselben auf die betreffenden Projektionsebenen handeln.

Die besagten Projektionen der Fluchtstrahlen ergeben sich, wie aus Früherem bekannt, sofort in $f'_1 = v'_1 C$, in $f = Av$ und $f' = Cv'$, daher beziehungsweise durch $\sigma\mu = E_g$ parallel zu $v'_1 C$ die Grundrisstrace, durch l parallel zu vA die vertikale, und durch l' parallel zu $v'C$ die horizontale oder Grundfläch-Projektion dargestellt wird.

Um endlich die orthogonalen Projektionen (a, a') des durch a_p auf vd gegebenen Punktes zu finden, hat man nur die bildflächprojizierende Gerade Aa_p zu ziehen und deren Schnittpunkt mit der bereits gefundenen orthogonalen Bildprojektion l festzustellen, um sogleich in a die orthogonale Bildflächprojektion und in a' die orthogonale Grundflächprojektion des in der Ebene liegenden Punktes a_p bestimmt zu erhalten.

§ 446.

182. Aufgabe: **In einer durch die Bildflächtrace E_b und die Perspektive E'_g der Grundflächtrace bestimmten Ebene E ist eine Gerade durch die Perspektive l'_p ihrer Grundflächprojektion gegeben; die Gerade ist so zu bestimmen, dass sie in der Ebene E liegt. Weiter sind die Fluchttrace, die orthogonale Grundflächtrace der Ebene E und die orthogonalen Projektionen der in E liegenden Geraden darzustellen.**

Nachdem die Gerade l'_p [Fig. 344, Taf. XXIX] in der gegen die Bild- und Grundebene geneigten Ebene E liegen soll, so muss sie (hinreichend verlängert) auch die Bild- und Grundebene in Punkten treffen, welche den Spuren der Ebene E auf den besagten Projektionsebenen, also beziehungsweise der Bild- und Grundflächtrace angehören.

Der Schnittpunkt d der durch l'_p gegebenen Geraden mit der Bildebene ist sein eigenes Bild, das Bild d' des Grundrisses dieses

Punktes (welches, nebenbei bemerkt, mit der orthogonalen Grundflächprojektion zusammenfällt) liegt demnach im Schnitte von l'_p mit der Grundlinie **gg**. Der Schnitt (δ, δ') derselben Geraden mit der Grundebene findet sich in der zu bestimmenden Grundrisstrace E_g der Ebene **E**; die Perspektive δ'_g der Grundflächprojektion dieses Schnittpunktes muss somit im Schnitte der Perspektive E'_g der Grundrisstrace mit l'_p liegen und wird, als Punkt der Grundebene, mit seiner Perspektive δ_g zusammenfallen.

Hiernach wird sich in der Verbindungsgeraden von (δ_g, δ'_g) mit **d** die gesuchte Perspektive l_p der in der Ebene liegenden Geraden (l_p, l'_p) ergeben.

Da überdies die Perspektive l'_p der Grundflächprojektion die Horizontallinie **HH** in **v'** trifft, so wird durch den letztbezeichneten Punkt **v'** die Perspektive der Grundflächprojektion des Fluchtpunktes dargestellt; die Perspektive **v** des Fluchtpunktes muss sonach in der Senkrechten zur Horizontallinie und in l_p, also im Schnitte beider liegen.

Nachdem die Gerade (l_p, l'_p) der Ebene **E** angehören soll, wird **v** einen Punkt der Fluchttrace E_v dieser Ebene darstellen.

Es wird sonach (v_1, v'_1) als Fluchtpunkt der Grundrisstrace, d. i. aller horizontalen in der Ebene **E** liegenden Geraden, mit **v** verbunden eine Gerade, „die verlangte Fluchttrace E_v", der Ebene **E** geben, die (als Kontrolle) nothwendig zu E_b parallel laufen muss.

Als weitere Kontrolle kann der Umstand dienen, dass nunmehr (δ_g, δ'_g), **v** und **d** und beziehungsweise ebenso ($v_1 v'_1$), σ und δ'_g in einer und derselben Geraden l_p resp. E'_g liegen müssen.

Zum Zwecke der Ausmittelung der orthogonalen Projektionen sind wieder, so wie in der vorhergehenden Aufgabe, bloss die orthogonalen Projektionen $f'_1 = C(v_1 v'_1)$, $f' = Cv'$ und $f = Av$ der den betreffenden Geraden entsprechenden Flucht- oder Parallelstrahlen zu bestimmen und sodann beziehungsweise durch σ, **d** und **d'** die hierzu Parallelen E_g, **l** und **l'** zu führen, um in E_g die Grundflächtrace, in **l** die orthogonale vertikale oder Bildflächprojektion, und in **l'** die orthogonale horizontale oder Grundrissprojektion der in der Ebene **E** liegenden Geraden (**l**, **l'**) dargestellt zu erhalten.

§ 447.

183. Aufgabe: **Eine Ebene E ist durch ihre Bildflächtrace E_b und ihre Grundflächtrace E_g bestimmt, ferner ist die orthogonale Bildflächprojektion $l = d\delta$ einer in der Ebene $E_b E_g$ liegenden Geraden und auf derselben ein Punkt** a **gegeben; es sind die Perspektiven der gegebenen Bestimmungsstücke aus den orthogonalen Projektionen** a) **mit Zuhilfenahme der Grundebene und** b) **nach der Methode der freien Perspektive abzuleiten.**

Zunächst bestimmen wir aus der gestellten Bedingung, dass die Gerade und der Punkt in der Ebene $E_b E_g$ [Fig. 345, Taf. XXIX] zu liegen haben, die den gegebenen orthogonalen Bildebenprojektionen $l = d\delta$ und a zugehörigen Grundflächprojektionen $l' = d'\delta'$ und a', so dass die Gerade durch $(d\delta, d'\delta')$ und der Punkt durch (a, a') dargestellt erscheinen.

Das perspektivische Bild des Durchstosspunktes d fällt, als in der Bildebene liegend, mit der gegebenen orthogonalen Bildflächprojektion d zusammen; die Perspektive d' der Grundflächprojektion des genannten Punktes liegt somit in der Grundlinie gg.

Die Perspektive δ_g des Punktes (δ, δ') dagegen wird, als ein Punkt der Grundebene und der Grundflächtrace E_g, mit der Perspektive δ'_g des Grundrisses übereinstimmen und daher gleichzeitig einen Punkt der Perspektive E'_g der Grundflächtrace E_g liefern, welcher mit dem Schnittpunkte (σ, σ') von E_g und gg verbunden, die vorgenannte Trace E'_g bestimmt.

Gleichzeitig werden die geraden Verbindungslinien von d mit δ_g und d' mit δ'_g die perspektivischen Bilder $d\delta_g$ und $d'\delta'_g$ der in der Ebene $E_b E'_g$ liegenden Geraden darstellen.

Die Perspektive (a_p, a'_p) des Punktes (a, a') findet sich selbstverständlich in den letztgenannten Bildern der Geraden und zwar im Schnitte der Bildflächprojektionen Aa und $A\alpha$ der betreffenden bildflächprojizierenden Strahlen mit $d\delta_g$ und $d'\delta'_g$ vor, so zwar, dass durch (a_p, a'_p) der orthogonal gegebene Punkt (a, a') perspektivisch dargestellt erscheint.

Auf die Methode der freien Perspektive übergehend, ergibt sich sofort durch die aus dem Fluchtpunkte (v_1, v'_1) der horizontalen Trace E_g, resp. durch die aus dem Schnittpunkte (v_1, v'_1) der E'_g mit HH, zu E_b geführte Parallele E_v die Fluchttrace.

Durch die Verlängerung von $d\delta_g$, bis die Fluchttrace E_v in v geschnitten wird, findet man in dv die durch den Flucht- und Durchstosspunkt dargestellte Perspektive der orthogonal durch ($d\delta$, $d\delta'$) gegebenen Geraden, und unmittelbar auf derselben (letztere als Träger betrachtet) die Perspektive a_p des orthogonal gegebenen Punktes (a, a'), woraus erhellt, dass jederzeit die Überführung aus der orthogonalen Projektion in die Perspektive und umgekehrt anstandslos vollzogen werden könne.

§ 448.

184. Aufgabe: **Die Bildflächtrace E_b und die Perspektive E'_g der Grundflächtrace einer zur Grundlinie gg parallelen Ebene E sind gegeben; es ist die Fluchttrace der Ebene E zu bestimmen.**

Da die Fluchttrace E_v zu der Bildflächspur E_b [Fig. 346, Taf. XXIX] stets parallel läuft, wird die Bestimmung eines Punktes der ersteren genügen.

Denken wir uns demnach in der Ebene $E_b E'_g$ auf Grund des Vorausgeschickten irgend eine Gerade gezogen, so wird sich deren Perspektive l und deren Perspektive l' der Grundflächprojektion in einem Punkte (δ_g, δ'_g) der E'_g treffen, während sich der Durchstosspunkt d derselben Geraden (l, l') mit der Bildebene in einem Punkte (d, d') der Trace E_b ergibt.

Der Fluchtpunkt v' der Grundflächprojektion der Geraden (l, l') liegt bekanntlich in der Horizontslinie HH, während im Schnitte v der zu HH Senkrechten $v'v$ mit l das Bild des Fluchtpunktes der besagten Geraden erhalten wird.

Es wird somit durch v ein Punkt der zu bestimmenden Fluchttrace E_v repräsentiert. Letztere ist nunmehr durch v parallel zu E_b zu führen, um den Bedingungen der Aufgabe zu genügen.

Würde die Ebene E nicht nur parallel zur Grundlinie sein, sondern durch die Grundlinie gg selbst gehen, so ist an und für sich klar, dass, da eine Ebene bloss durch eine der Geraden E_b, E_g, E'_g [Fig. 347, Taf. XXIX], die diesfalls alle mit gg zusammenfallen, nicht hinreichend bestimmt ist, zum Behufe ihrer vollkommenen Bestimmung noch irgend ein anderweitiges Bestimmungsstück derselben gegeben sein müsse.

Es könnte also etwa ein der Ebene E angehöriger Punkt

(a_p, a'_p) gegeben sein. Unter dieser Voraussetzung ist somit aus $E_b E'_g$ und (a_p, a'_p) die Fluchttrace E_v abzuleiten.

Der diesbezügliche Vorgang bleibt derselbe wie oben, nur wird der Unterschied obwalten, dass die in der Ebene E zu ziehende Gerade direkt durch den gegebenen Punkt (a_p, a'_p) gehen muss und dass deren Durchstosspunkt (d, d') mit der Bildebene mit dem Grundflächdurchstosspunkte (δ, δ') zusammenfällt, dass also auch die Perspektive d des besagten Punktes mit der Perspektive (δ_g, δ'_g) des Grundrisses desselben übereinstimmen müsse.

Führen wir demnach die beliebige Gerade $\delta'_g a'_p v'$, so ist auch (δ_g, d)a_p bestimmt, folglich auch der Fluchtpunkt v festgestellt und somit die Fluchttrace E_v in der durch v zu gg parallel gezogenen Geraden gefunden.

Wäre die zur Grundlinie gg parallele Ebene E durch $E_b E_v$ [Fig. 348, Taf. XXIX] gegeben, und sollte einerseits E'_g und anderseits E_g bestimmt werden, so wird man in der geraden Verbindungslinie zweier Punkte d und v, von welchen der eine d in E_b, der andere v in E_v liegt, direkt eine in der Ebene $E_b E_v$ liegende Gerade l_p centralprojektivisch bestimmt erhalten.

Ermittelt man die Perspektive $v' d'$ oder l'_p der Grundflächprojektion dieser Geraden, und sucht man die Perspektive (δ_g, δ'_g) der Grundflächprojektion des Durchstosspunktes derselben mit der Grundebene, so ist auch schon die Perspektive E'_g der Grundflächtrace in der durch (δ_g, δ'_g) gehenden, zu E_b parallelen Geraden bestimmt.

Nachdem es sich weiter noch um die Grundrisstrace E_g handelt, welche parallel zu E'_g läuft, wird man bloss die orthogonale Grundflächprojektion eines Punktes von E'_g zu bestimmen haben. Wählt man unmittelbar den Punkt (δ_g, δ'_g), so ergibt sich, wie bekannt, dessen orthogonale Projektion in (δ, δ') und daher die verlangte Grundrisstrace in E_g.

§ 449.

185. Aufgabe: **Eine zur Bildebene B_E parallele Ebene E ist durch das Bild eines ihrer Punkte a_p auf dem Träger vd gegeben; es sind** a) **die Perspektive E'_g der Grundflächtrace dieser Ebene, sowie die Grundflächtrace E_g derselben, und** b) **die orthogonalen Projektionen (a, a') des perspektivisch gegebenen Punktes a_p zu bestimmen.**

Ermittelt man zunächst aus dem Bilde $l_p = vd$ [Fig. 349, Taf. XXIX] des Trägers t das perspektivische Bild $v' d' = l'_p$ seines

Grundrisses, bestimmt man ferner auf demselben aus der gegebenen Perspektive a_p die Perspektive a'_p der Grundflächprojektion des besagten der Ebene E angehörenden Punktes, so wird selbstverständlich (da die zur Bildebene B_E parallele Ebene eine grundflächprojizierende Ebene ist) durch a'_p die Perspektive E'_g der Grundrisstrace von E und zwar parallel zu gg zu führen sein.

Um die Überführung der perspektivisch gegebenen Bestimmungsstücke in die orthogonale Projektion zu bewerkstelligen, wird es genügen die orthogonalen Projektionen (a, a') desjenigen Punktes a_p zu bestimmen, durch welchen die zur Bildebene B_E parallele Ebene geht, und sodann durch die Grundflächprojektion a' des gegebenen Punktes a_p eine Gerade parallel zu E'_g zu führen, um (aus obigem Grunde) sofort die verlangte Grundrisstrace E_g der Ebene E dargestellt zu erhalten.

Denkt man sich zu diesem Behufe die bildflächprojizierende Gerade (Aa_p, Aa'_p) geführt und ihren Durchstosspunkt a mit der Bildebene auf bekannte Weise aufgesucht, sowie dessen Grundflächprojektion a' durch den Schnittpunkt des Strahles Ca'_p mit der zu gg Senkrechten $a\alpha$ bestimmt, so ergibt sich in der durch a' zu gg Parallelen E_g die gesuchte Grundflächtrace.

Zur Kontrolle für die Richtigkeit könnte man auch mit Zuhilfenahme der Projektionen (Av, Cv') des der Geraden dv entsprechenden Fluchtstrahles die orthogonalen Projektionen (da, $d'a'$) $=$ (l, l') der gegebenen Geraden vd aufsuchen, und, da in diesen Projektionen l und l' selbstverständlich die bezüglichen orthogonalen Projektionen (a, a') des auf dem Träger $t = vd$ liegenden Punktes a_p sich gleichfalls vorfinden sollen, müssen die auf die letztangegebene Weise ermittelten Punkte mit den vorher bereits bestimmten Punkten a und a' zusammenfallen.

§ 450.

186. Aufgabe: **Durch einen perspektivisch gegebenen Punkt ist eine Ebene parallel zu einer gegebenen Ebene zu führen.**

Es seien E_b [Fig. 350, Taf. XXIX] die Bildflächtrace, E'_g die Perspektive der Grundrisstrace der gegebenen Ebene E und (a_p, a'_p) die perspektivischen Bilder desjenigen Punktes, durch welchen die Ebene $e_b e'_g$ parallel zu $E_b E'_g$ zu führen ist.

Selbstverständlich ist durch die Angabe von E'_g und E_b auch schon die Flucht- oder Verschwindungslinie E_v der Ebene E festgestellt; dieselbe wird bekanntlich erhalten, wenn man E'_g bis zur Horizontallinie HH verlängert und durch den Schnittpunkt (v, v_1) eine Parallele zu E_b führt.

Zieht man nun durch a_p eine Parallele λ zu E_b und durch a'_p eine Parallele λ' zur Grundlinie gg, so wird (λ, λ') eine durch (a_p, a'_p) gehende Gerade darstellen, die in der zu bestimmenden Ebene liegt und zur Bildebene parallel läuft. Im Schnitte (δ_g, δ'_g) von λ und λ' ergibt sich somit ein Punkt der Perspektive e'_g der Grundrisstrace der verlangten Ebene e.

Nachdem aber, wie wir wissen, parallele Ebenen eine gemeinschaftliche Fluchttrace besitzen, und nachdem weiter bekannt ist, dass parallele Geraden (wie es diesfalls die Spuren der parallelen Ebenen E und e auf derselben dritten Ebene sind) in dem nämlichen Punkte verschwinden, und dass ferner der Fluchtpunkt horizontaler Geraden (eine solche ist die Grundrisstrace der parallel zu E zu legenden Ebene e) in der Horizontallinie liegt, so wird, da nunmehr die Perspektive der Grundrisstrace der Ebene e durch die zwei Punkte (v, v_1) und (δ_g, δ'_g) bestimmt ist, bloss (v, v_1) mit (δ_g, δ'_g) durch eine Gerade zu verbinden sein, um die Perspektive e'_g der Grundrisstrace der verlangten Ebene e dargestellt zu erhalten.

Führt man nun durch den sich hierbei ergebenden Schnittpunkt m von e'_g und der Grundlinie gg (der besagte Punkt m ist, als in der Grundlinie liegend, sein eigenes perspektivisches Bild, welches mit dem seiner Grundflächprojektion zusammenfällt) eine Gerade e_b parallel zu E_b, so ist diese bereits die gesuchte Bildflächtrace e_b der Ebene e.

Würde es sich ausserdem noch um die Bestimmung der den beiden parallelen Ebenen E und e gemeinschaftlichen Fluchttrace (E_v, e_v) handeln, so braucht nur in Erinnerung gebracht zu werden, dass diese ihrer Richtung nach, als der Parallel- oder Fluchtebene der Ebenen E und e angehörend, zu E_b resp. e_b parallel sei und, wie bereits wiederholt angeführt, durch den Punkt (v_1, v) der Horizontallinie gehen müsse.

Wollte man unter der Voraussetzung, dass die Ebene E durch E_v und E_b gegeben sei, die zu E parallele Ebene $e_b e_v$ so bestimmen, dass dieselbe gleichzeitig durch den auf dem Träger vd gegebenen Punkt a_p geht, so wird es sich

gleichfalls nur um die Fixierung eines Punktes der Geraden e_b, d. i. der Bildflächtrace der Ebene e, handeln.

Nachdem bereits der Punkt (v, v_1) die Perspektive und die Perspektive der Grundrissprojektion des Fluchtpunktes einer in der Ebene liegenden horizontalen Geraden ($a_p v$, $a'_p v_1$) darstellt, wird man nur noch den Durchstosspunkt (d, d') derselben mit der Bildebene B_E zu suchen und durch diesen Punkt d eine Gerade e_b parallel zu E_b zu ziehen haben, um die Bildflächtrace der durch den gegebenen Punkt (a_p, a'_p) parallel zu $E_b E_v$ gelegten Ebene $e_b e_v$ zu erhalten.

Selbstverständlich muss nun e_b die Grundlinie in m treffen und kann weiter mit Zuhilfenahme jeder anderen durch (a_p, a'_p) beliebig geführten Geraden ($a_p v_2$, $a'_p v'_2$) der gleiche Zweck erreicht werden. Die eine Konstruktionsweise kann gleichzeitig als Kontrolle für die andere dienen.

§ 451.

187. Aufgabe: **Durch eine Gerade ($l_p = dv$, $l'_p = d'v'$) ist parallel zu einer zweiten Geraden (λ_p, λ'_p)** [Fig. 351, Taf. XXIX] **eine Ebene zu führen und diese beziehungsweise durch E_b, E'_g und durch E_b, E_v zu bestimmen.**

Behufs Lösung dieser Aufgabe wird zunächst in Erinnerung zu bringen sein, dass die Fluchtpunkte von Geraden, die zu einer Ebene parallel sind, in der Fluchtlinie der letzteren liegen, indem bekanntlich die Fluchttrace einer Ebene der Ort der Durchstosspunkte (Fluchtpunkte) sämtlicher Fluchtstrahlen ist, die durch das Centrum parallel zu den in der Ebene möglichen Geraden gezogen werden können.

Dass hiernach einer Geraden (λ_p, λ'_p), welche zu einer Ebene E parallel sein soll, auch eine Gerade in dieser Ebene entsprechen werde, welche zu der ersteren parallel läuft, und dass demgemäss der Fluchtstrahl der Geraden (λ_p, λ'_p) die Fluchttrace E_v der Ebene E in einem Punkte φ treffen müsse, welcher mit jenem zusammenfällt, der einer in der Ebene E liegenden zu (λ_p, λ'_p) parallelen Geraden entspricht, ist bereits (§ 15) an früherer Stelle klar gelegt worden.

Ist daher (l_p, l'_p) jene Gerade, durch welche die Ebene E zu führen ist, und (λ_p, λ'_p) diejenige Gerade, zu welcher die besagte Ebene E parallel sein soll, so wird im vorliegenden Falle bloss

der Fluchtpunkt (v, v') der Geraden (l_p, l'_p) zu ermitteln und mit dem Fluchtpunkte (φ, φ') von (λ_p, λ'_p) geradlinig zu verbinden sein, um in $v\varphi$ oder E_v die verlangte Fluchttrace der Ebene E bestimmt zu erhalten.

Sucht man nun noch den Durchstosspunkt (d, d') derjenigen Geraden (l_p, l'_p) mit der Bildebene, durch welche die Ebene E zu legen ist, und führt man durch diesen Punkt eine Parallele zu der vorher bestimmten Fluchttrace E_v, so bestimmt diese die Bildflächtrace E_b der gesuchten Ebene.

Nachdem weiter (v_2, v'_2) den Fluchtpunkt von in der Ebene E liegenden horizontalen Geraden und folglich auch den der Grundrisstrace repräsentiert, und (σ, σ'), als der Grundlinie angehörend, mit seiner eigenen Perspektive zusammenfällt, so gibt die Verbindungsgerade von v'_2 mit σ' die Perspektive E'_g der Grundriss- oder Grundflächtrace der Ebene E.

Die besagte Gerade $v'_2\sigma'$ oder E'_g muss natürlich, bei richtiger Konstruktion, durch die Perspektive (δ_g, δ'_g) des Schnittpunktes der Geraden (l_p, l'_p) mit der Grundebene gehen, und kann dieser Punkt somit als Kontrolle für die Richtigkeit der Durchführung dienen oder auch dann benützt werden, wenn einer oder der andere der vorerwähnten Punkte sich auf der Zeichnungsfläche nicht mehr ergeben würde.

§ 452.

188. Aufgabe: **Zu einer durch ihre Bildflächtrace E_b** [Fig. 352, Taf. XXIX] **und durch die Perspektive E'_g ihrer Grundflächtrace bestimmten Ebene E soll durch einen Punkt (x_p, x'_p) eine senkrechte Gerade gezogen und durch ihre Perspektive und die Perspektive ihres Grundrisses dargestellt werden.**

Zur Auflösung dieses Problems benützen wir die bekannte Eigenschaft, dass die orthogonale Bildflächprojektion einer zu einer Ebene senkrechten Geraden auf der Bildflächtrace dieser Ebene und die orthogonale Grundflächprojektion auf der (orthogonalen) Grundflächtrace derselben Ebene senkrecht steht.

Betrachten wir für einen Moment die Horizontalebene H_E als Grundebene, und bestimmen diesfalls die orthogonale Bildflächprojektion σ sowohl, als auch die orthogonale Grundflächprojektion σ' des Fluchtstrahles aller zur Ebene $E_bE'_g$ senkrechten Geraden.

Hierbei wird sich σ als die durch den Hauptpunkt **A** zur Bildflächtrace E_b geführte Senkrechte ergeben. Um die orthogonale Grundflächprojektion σ' zu finden, berücksichtigen wir, dass dieselbe einerseits durch das um **HH** in die Bildebene umgelegte Centrum **C** gehen, anderseits aber auf der orthogonalen Grundflächtrace E_g der Ebene $E_b E_g'$, oder auf einer zu ihr parallelen Geraden (allenfalls auf dem ihr entsprechenden Fluchtstrahl) senkrecht stehen müsse. Eine solche Gerade ist, wie gesagt, der umgelegte der Grundflächtrace E_g entsprechende Fluchtstrahl Cv_1, deren Fluchtpunkt v_1 als Schnitt von E_g' mit **HH** erhalten wird. Die Gerade σ' ergibt sich nun als die durch **C** zu Cv_1 normal geführte Gerade Cv'.

Nachdem somit durch (σ, σ') die orthogonalen Projektionen des zur Ebene $E_b E_g'$ senkrechten Fluchtstrahles dargestellt sind, kann man leicht auch den Bildflächdurchstosspunkt **v**, und den Durchstosspunkt **v'** mit der Grundebene (in der Horizontslinie **HH** liegend) auf bekannte Weise ermitteln. Der erstere, d. i. **v**, wird den Fluchtpunkt aller zur Ebene $E_b E_g'$ senkrechten Geraden, der zweite dagegen, d. i. **v'**, den Fluchtpunkt der Grundrisse dieser Geraden repräsentieren.

Die Perspektive der gesuchten durch (x_p, x_p') gehenden Senkrechten zu $E_b E_g'$ erhält man nunmehr unmittelbar als die Verbindungsgerade $S_p = x_p v$, während sich die Perpektive ihrer Grundflächprojektion in der Verbindungsgeraden $S_p' = x_p' v'$ ergibt.

§ 453.

189. Aufgabe: **Gegeben sind eine Gerade durch ihre Perspektive s_p [Fig. 352, Taf. XXIX] und die Perspektive s_p' ihres Grundrisses und ein Punkt (a_p, a_p'); durch letzteren ist eine Ebene senkrecht zu der Geraden (S_p, S_p') zu führen und durch ihre Bildflächtrace und die Perspektive der Grundflächtrace zu bestimmen.**

Die Lösung dieser Aufgabe wird, wie ohne weiteres ersichtlich, lediglich in einer umgekehrten Folge der in dem eben vorausgeschickten Probleme angewendeten Konstruktion bestehen.

Sind nämlich **v** der Fluchtpunkt und **v'** die Perspektive der Grundrissprojektion des Fluchtpunktes der gegebenen Geraden (S_p, S_p'), so werden (wenn man die Horizontsebene H_E vorüber-

gehend als Grundebene betrachtet), die Geraden $Av = \sigma$ und $Cv' = \sigma'$ beziehungsweise die orthogonale Bildflächprojektion und die orthogonale Grundflächprojektion des Fluchtstrahles der Geraden (S_p, S'_p) darstellen.

Führt man demnach durch C zu Cv' die Senkrechte Cv_1, so wird dieselbe, wie der vorhergehenden Aufgabe zu entnehmen, den umgelegten Fluchtstrahl der Grundflächtrace der zu suchenden Ebene darstellen, während der Schnittpunkt v_1 mit der Horizontslinie HH den Fluchtpunkt dieser Grundflächtrace repräsentiert.

Um mithin die Perspektive E'_g der Grundflächtrace E_g verzeichnen zu können, wird es genügen, einen zweiten Punkt derselben zu bestimmen. Als solchen wollen wir die Perspektive (δ_g, δ'_g) der Grundflächprojektion des Durchstosspunktes einer durch (a_p, a'_p) in der zu bestimmenden Ebene parallel zur Bildebene (Bildflächtrace) gezogenen Geraden (λ_p, λ'_p) betrachten.

Nachdem die Bildflächtrace senkrecht zu σ ist, wird auch die Bildflächperspektive λ_p durch a_p senkrecht zu σ zu führen sein. Die Grundrissperspektive λ_p' geht durch a'_p und ist bekanntlich parallel zu HH oder gg. Im Schnitte von λ_p und λ'_p ergibt sich die Perspektive des Grundflächdurchstosspunktes δ'_g, und mithin in $v_1\delta'_g = E'_g$ die Perspektive der Grundflächtrace der verlangten Ebene. Die Bildflächtrace E_b geht durch den Schnitt Δ von E'_g mit gg und ist parallel zu λ_p, also senkrecht zu σ.

Aus diesen in möglichster Ausführlichkeit besprochenen Prinzipien und den darauf gestützten Aufgaben dürfte der Gebrauch der Grundebene bei perspektivischen Darstellungen vollkommen klar gelegt sein und auch kein Zweifel über den Zusammenhang zwischen der centralen und der orthogonalen Projektionsmethode obwalten. Ebenso wird es auch keinerlei Schwierigkeiten bieten können, von einer Projektionsart ohne weiteres auf eine andere der genannten Darstellungsweisen zu übergehen und diesbezügliche „Überführungen“ sofort zu vollziehen.

XXXII. Kapitel.

d) Perspektivische Darstellung architektonischer Objekte.

§ 454.

Allgemeine Bemerkungen.

Insofern, als man es in der Architektur grösstenteils mit Gebilden zu thun hat, welche durch drei Systeme von aufeinander senkrechten Geraden begrenzt sind, von welchen überdies zwei derselben in Horizontalebenen liegen, das dritte jedoch vertikal ist (sich demnach auch perspektivisch vertikal darstellt), so ist einleuchtend, dass man bei der perspektivischen Darstellung solcher Objekte von den in der centralen Projektionslehre aufgestellten allgemeinen Sätzen und Lösungsweisen nur einen beschränkten Gebrauch macht und dass selbst diese noch mannigfache Vereinfachungen gestatten werden.

Aus der eben bezeichneten Lage der Flächen und Kanten folgt, dass es in den meisten Fällen zweckmässig sein wird, vorerst das Bild des Grundrisses zu verzeichnen, sodann die vertikalen Kanten des Bildes in den einzelnen Eckpunkten des Grundrisses zu errichten und die betreffenden Längen daselbst centralprojektivisch aufzutragen.

§ 455.

Horizontslinie, Augpunkt, Augdistanz.

Es sei uns hier gestattet, einiges nochmals zu berühren, welches für die Konstruktion gefälliger und anschaulicher perspektivischer Bilder von besonderer Wichtigkeit ist. Es sind dies einzelne Bemerkungen über die zweckmässige Wahl der Horizontslinie, des Haupt- oder Augpunktes und der Augdistanz oder kurz der Distanz.

Was die Horizonts- oder Horizontallinie anbelangt, so hängt die Annahme derselben von dem darzustellenden Gegenstande, von der Art des Bildes und der Aufstellung desselben ab.

Ist beispielsweise ein Gesimse perspektivisch zu verzeichnen, so kann der Horizont verhältnismässig tief angenommen werden, während man ihn sonst gewöhnlich in der Mitte des Bildes wählt.

Infolge des einmal angenommenen Horizonts kann der Aug- oder Hauptpunkt bloss nur noch in der Breitenrichtung der als

Bildfläche bestimmten Ebene beliebig gewählt werden. Die natürlichste Lage des Augpunktes bietet der Mittelpunkt der begrenzten Bildfläche, indem man, um ein Bild zu betrachten, dasselbe gewöhnlich so vor das beobachtende Auge zu stellen pflegt, dass sich letzteres nahezu über oder unter dem besagten Punkte des Bildes befindet.

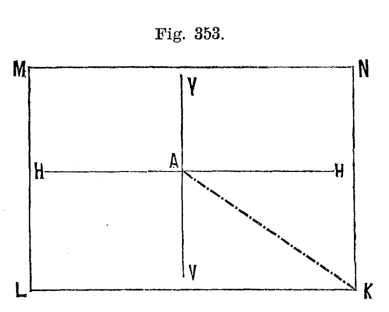
Es wird daher, wenn ein Bild den gewünschten Eindruck hervorbringen soll und nicht durch besondere Umstände andere Forderungen gestellt werden, der Augpunkt stets in der Nähe des Mittelpunktes desselben angenommen werden müssen.

Eine Ausnahme hiervon könnte beispielsweise dann eintreten, wenn das Bild einen seitwärts liegenden Gegenstand von besonderer Wichtigkeit oder hervorragendem Interesse enthält; in diesem Falle wird selbstverständlich der Augpunkt nach der Seite dieses Objektes zu verschieben sein.

Das Wichtigste bei perspektivischen Zeichnungen bildet die Annahme der „Distanz", welche, um das ganze Bild deutlich übersehen zu können, ohne den Kopf wenden oder die Stellung des Auges ändern zu müssen, wenigstens zweimal so gross angenommen werden muss, als der Abstand des entferntesten Punktes des Bildes vom Hauptpunkte.

Ist also das Rechteck **KLMN** [Fig. 353] die begrenzte Bildfläche und **A** der Augpunkt, so ist **K** einer jener Punkte des Bildes, welche von **A** am weitesten abstehen, weshalb in diesem Falle die Distanz **D** wenigstens doppelt so gross als **AK**, daher als unterste Grenze $D = 2 \cdot AK$, anzunehmen wäre. Hieraus ist ersichtlich, dass die Augdistanz fast durchgehends eine solche Ausdehnung erhält, dass die Konstruktionen nur mit aliquoten Teilen derselben durchgeführt werden können.

Fig. 353.



§ 456.

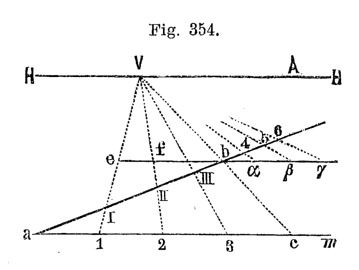
Teilung von Geraden.

Die Teilung der Geraden wurde bereits in den §§ 62 und 63 besprochen; es sei jedoch hier über diesen Gegenstand noch folgendes bemerkt.

a) Ist **ab** [Fig. 354] das Bild einer horizontalen, durch die beiden Punkte **a** und **b** begrenzten Geraden, welche in eine bestimmte Anzahl **n** gleicher Teile geteilt werden soll, so kann dies bekanntlich mit Benützung eines beliebigen, in der Horizontslinie **HH** gelegenen Punktes **v** bewerkstelligt werden.

Wird nämlich durch **a** eine zu **HH** parallele Gerade **am** gezogen, **b** mit **v** verbunden und bis zum Durchschnitte **c** mit **am** verlängert, ferner **ac** in die gegebene Anzahl gleicher Teile geteilt und die einzelnen Teilpunkte mit **v** vereint, so schneiden diese Teilungslinien die Perspektive **ab** in den zu bestimmenden Teilpunkten **I**, **II** . . . . .

Fig. 354.

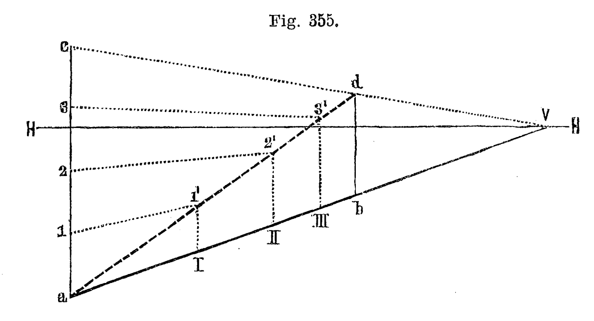


b) Um das Einteilen der Länge **ac** zu vermeiden, kann eine beliebig angenommene Strecke **a1** auf **am** **n** mal, beispielsweise bis **c**, aufgetragen und **c** mit **b** verbunden werden, wodurch sich in der Horizontslinie **HH** der Punkt **v** ergibt, welcher mit den einzelnen Teilpunkten 1, 2, 3 . . . der Geraden **am** zu verbinden ist.

Die Richtigkeit dieser beiden Konstruktionen erhellt daraus, dass die einzelnen Teilungslinien, als auf einen gemeinschaftlichen Fluchtpunkt **v** zugehend, im Raume zu einander parallel sind, daher auch auf **ab**, sowie auf **am**, gleiche Stücke abschneiden.

c) Dieselbe Teilung kann auch in der Art vollzogen werden, dass man auf der in dem einem Endpunkte **a** [Fig. 355] errichteten Vertikalen eine Länge **a1** **n** mal aufträgt, den Endpunkt **c**

Fig. 355.

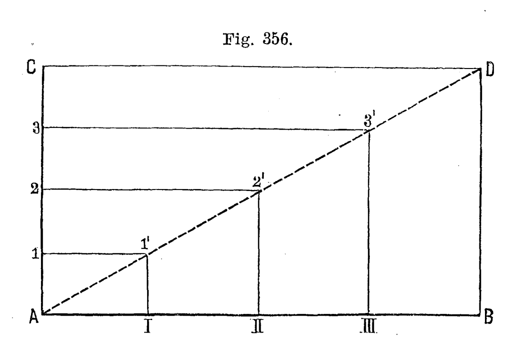


der so erhaltenen Länge mit dem Fluchtpunkte **v** der gegebenen Geraden **ab** verbindet, ferner die Vertikale **bd** errichtet und die Diagonale **ad** zieht.

Werden nun die einzelnen Teilpunkte der Geraden **ac** mit **v** verbunden, so schneiden diese Verbindungslinien die Diagonale **ad** in den Punkten 1', 2' . . ., während die durch diese Punkte geführten Vertikalen die Gerade **ab** in den gesuchten Punkten **I**, **II** . . . treffen.

Werden sämtliche Linien dieser Figur in der Lage, in welcher sie sich im Raume befinden, auf die Bildfläche übertragen, so wird die Richtigkeit des obigen Verfahrens von selbst klar; denn auf der Geraden **AB** [Fig. 356] wurde die Senkrechte **AC** errichtet, auf dieser eine Länge **A**1, von **A** nach **C**, **n** mal aufgetragen und die Geraden **CD**, 11', 22' . . . parallel zu **AB** geführt, nachdem deren Perspektiven gegen den Fluchtpunkt **v** der Geraden **ab** gerichtet sind. Die Diagonale **AD**, entsprechend der Geraden **ad** des Bildes, wird mithin in den Punkten 1', 2' . . . in **n** gleiche Teile geteilt, weshalb die durch diese Teilpunkte gezogenen Vertikalen die verlangte Teilung der Geraden **AB** in gleicher Weise bewirken.

Fig. 356.



d) Soll auf einer gegebenen Geraden **abv** [Fig. 354] eine schon in ihrer Perspektive gegebene Länge **al** mehrmals aufgetragen werden, so kann dies in gleicher Weise wie in den unter a) und b) angeführten Fällen geschehen.

Es wird nämlich ein beliebiger Punkt **v** der Fluchtlinie **HH** als Fluchtpunkt der Teilungslinien angenommen, durch **a** eine zu **HH** parallele Gerade **am** gezogen, **l** mit **v** verbunden und die Länge **a**1 auf **am** weiter aufgetragen. Die Verbindungsgeraden dieser Teilpunkte mit **v** schneiden **av** in den verlangten Punkten **I**, **II** . . . . Wäre die Teilung weiter fortzuführen, und würde das Auftragen der Teile auf **am** der begrenzten Zeichnungsfläche wegen weiter nicht mehr möglich sein, so könnte man durch irgend einen der bereits gefundenen Punkte, beispielsweise durch **b**, eine zu **am** Parallele **b**γ ziehen und mit Hilfe der Längenstücke **b**$\alpha = \alpha\beta \cdots =$ **ef** die Teilung, so wie früher, fortsetzen.

Wäre ein Längenstück **ab** [Fig. 354] in eine Anzahl Teile zu

teilen, welche in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen, so müsste die Teilung der zu **HH** Parallelen **am** in demselben Verhältnisse vorgenommen werden.

e) Sind in den einzelnen Teilpunkten einer Geraden **ab** [Fig. 357] vertikale Gerade, etwa als Mittellinien von Säulen, Bäumen und dergl. zu errichten, so kann auch in der Weise vorgegangen werden, dass man auf die in **a** errichtete Vertikale eine beliebige oder gegebene Länge **ac** aufträgt, diese in **d** halbiert und die Geraden **cv** und **dv** gegen den Fluchtpunkt **v** der gegebenen Geraden **ab** führt.

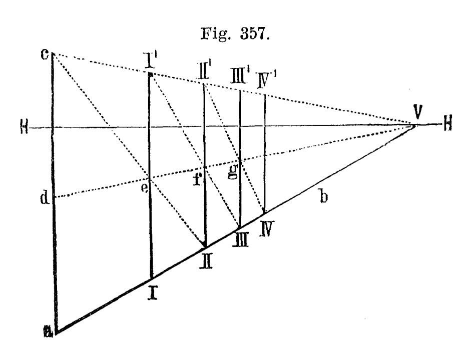


Fig. 357.

Sollen die einzelnen Mittellinien in der Entfernung **aI** gezogen werden, so wird man in dem gegebenen ersten Teilpunkte **I** die Vertikale **II'** zu errichten und deren Durchschnittspunkt **e** mit der Geraden **dv** mit **c** zu verbinden haben, um den nächsten Teilpunkt **II** zu erhalten. In derselben Weise wird die Teilung fortgesetzt.

Es sind daselbst offenbar die Längen **cd** und **eI** im Raume einander gleich, folglich die Dreiecke **cde** und **eIII** kongruent und daher auch die Strecken **aI** und **III** gleich lang.

f) Soll zwischen zwei perspektivisch gegebenen Vertikallinien **ab** und **cd** [Fig. 358], deren Fusspunkte **a** und **c** in einer und derselben Horizontalebene liegen, eine dritte, in der Mitte derselben, angegeben werden, so kann dies durch perspektivisches Halbieren der Länge **ac** [nach a) oder b)]; oder auch derart geschehen, dass man einen beliebigen Punkt **b** mit dem Fluchtpunkte **v** der Geraden **ac** verbindet und die Diagonalen **ad** und **bc** des so erhaltenen Rechtecks zieht. Dieselben schneiden sich in einem Punkte **o**, durch welchen die fragliche Vertikallinie **fe** zu führen ist.

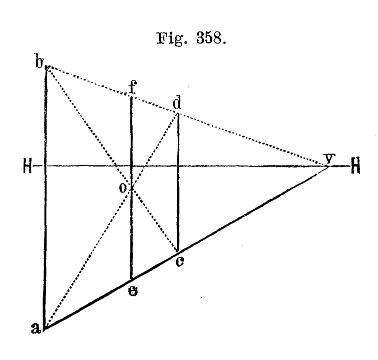


Fig. 358.

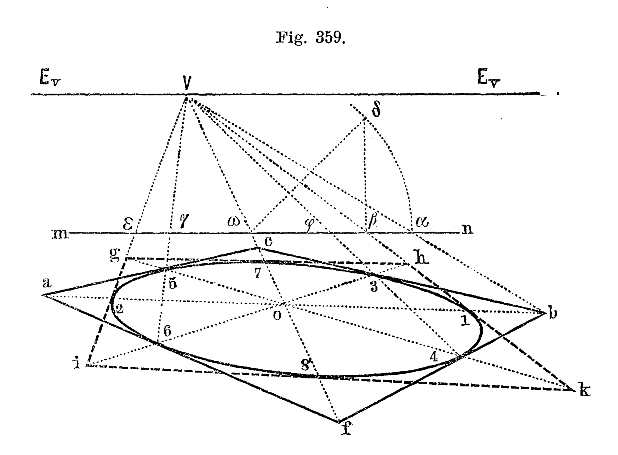
§ 457.

Kreisperspektive.

In der Praxis wird (abgesehen von den in §§ 220—224 gegebenen Konstruktionen) das Bild eines Kreises, mit Benützung der Perspektive des zur Bildfläche parallelen Kreisdurchmessers, zumeist in der Art verzeichnet, dass man die Bilder zweier, dem Kreise umschriebener Quadrate darstellt, wodurch acht Punkte der Peripherie nebst den zugehörigen Tangenten erhalten werden. Hier seien noch folgende Fälle einer näheren Betrachtung unterzogen.

a) Es kömmt häufig vor, dass das Bild **abcf** [Fig. 359] eines Quadrates gegeben ist, in welches ein Kreis eingeschrieben werden soll und bei welchem die Fluchtpunkte der Seiten unzugänglich

Fig. 359.



sind. In einem selchen Falle fällt immer der Fluchtpunkt **v** der einen Diagonale **cf** innerhalb der Zeichnungsfläche und kann demgemäss zur Bestimmung der vier Berührungspunkte des Kreises mit dem gegebenen Quadrate, sowie auch zur Verzeichnung der Perspektive eines zweiten Quadrates benützt werden, dessen Seiten gegen jene des ersteren unter einem Winkel von 45° geneigt sind.

Um die Berührungspunkte 3, 4, 5 und 6 zu erhalten, sind bloss die Seiten des gegebenen Quadrates perspektivisch zu halbieren. Zu diesem Zwecke ziehe man durch irgend einen Punkt der Geraden **ov** eine Gerade **mn** parallel zur Fluchttrace E_v der Kreisebene und verbinde den Punkt **b** mit **v**. Wird nun das auf

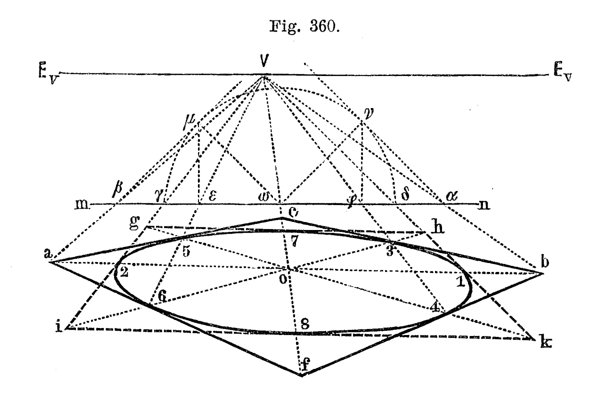
mn abgeschnittene Stück $\omega\alpha$ in φ perspektivisch halbiert, $\omega\varphi$ nach $\omega\gamma$ übertragen, und werden die Punkte γ und φ mit **v** vereint, so schneiden diese Geraden die Seiten des Quadrates in den vier Halbierungspunkten 3, 4, 5 und 6. Diese Punkte geben mit **o** verbunden die Diagonalen des gesuchten zweiten Quadrates.

Um jene Punkte 1 und 2 zu finden, in welchen der Kreis die Diagonale **ab** schneidet, hat man diese Gerade in dem bekannten Verhältnisse $1 : \sqrt{2} - 1$ zu teilen. In demselben Verhältnisse wird demnach auch die Strecke $\omega\alpha$ zu teilen sein, was einfach dadurch bewerkstelligt werden kann, dass man über $\omega\alpha$, als Radius, einen Kreisbogen $\alpha\delta$ von 45° beschreibt und den Endpunkt δ desselben senkrecht auf **mn** nach β projiziert.

Es ist sodann bloss $\omega\beta$ nach $\omega\varepsilon$ zu übertragen und sind die Punkte ε und β mit **v** zu verbinden, um im Durchschnitte dieser Geraden mit den eben gefundenen Diagonalen der vier Eckpunkte des zweiten Quadrates **ghik**, dessen Seiten die Kreisperspektive berühren und die Diagonalen **ab** und **cf** in den vier Punkten 1, 2, 7 und 8 des Bildes schneiden, zu erhalten.

Eine zweite Lösungsweise wäre jene, wo man über der Länge $\omega\alpha$ keinen Kreis beschreibt, sondern durch den Punkt α eine Gerade $\alpha\nu$ [Fig. 360] unter einem Winkel von 45° gegen **mn** zieht und $\omega\nu$ senkrecht auf $\alpha\nu$ errichtet.

Fig. 360.



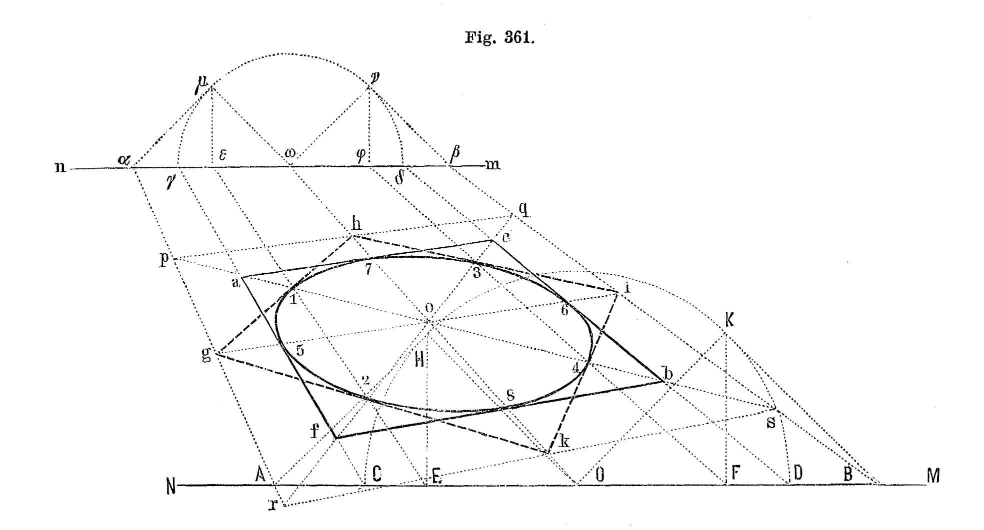
Wird nun aus ω mit dem Radius $\omega\nu$ ein Kreis beschrieben, so schneidet er die Gerade **mn** in den Punkten δ und γ, welche samt den Punkten φ und ε, die durch die Senkrechten $\nu\varphi$ und $\mu\varepsilon$ $(\omega\varphi = \omega\varepsilon)$ erhalten werden, in derselben Weise wie im vorigen Beispiele zu benützen sind, um die Punkte 1 bis 8 der Kreisper-

spektive, sowie das Bild des zweiten dem Kreise umschriebenen Quadrates **ghik** zu erhalten.

b) Ist die Perspektive **abcd** [Fig. 361] eines dem Kreise umschriebenen Quadrates gegeben, und hat die Kreisebene eine solche Lage, dass deren Fluchttrace ausserhalb der Zeichnungsfläche fällt, so kann selbstverständlich der Fluchtpunkt **v** der Diagonale **cf** nicht benützt werden, daher allenfalls folgendes Verfahren eingeschlagen werden kann.

Man ziehe zwei Gerade **mn** und **MN** parallel zur Fluchttrace der Kreisebene, verlängere zwei gegenüberliegende Quadratseiten

Fig. 361.



af und **bc** bis zum Durchschnitte γ, δ, **C**, **D** mit diesen Geraden und beschreibe über den Durchmessern $\gamma\delta$ und **CD** Halbkreise; ziehe ferner die Radien $\omega\mu$, $\omega\nu$, **OH**, **OK**, sowie die bezüglichen Tangenten $\alpha\mu$, $\beta\nu$, **AH**, **BK** unter je einem Winkel von 45° gegen **MN**, **mn** und fälle die Perpendikel $\mu\varepsilon$, $\nu\varphi$, **HE**, **KF** auf die beiden vorbezeichneten Geraden.

Verbindet man sodann die zusammengehörigen Punkte der Geraden **mn** und **MN** miteinander, so ergeben sich im Durchschnitte der Geraden ε**E**, φ**F** mit den Diagonalen **ab**, **cf** des gegebenen Quadrates die Berührungspunkte 1, 2, 3, 4 des zweiten Quadrates mit der Kreisperspektive und im Schnitte der Geraden **O**ω mit den Seiten **ac** und **bf** die Berührungspunkte 7 und 8 dieser beiden Seiten mit dem Kreise. Endlich begegnen die Linien **A**α,

Bβ den obigen Diagonalen in den Endpunkten **p**, **q**, **r**, **s** eines Quadrates, dessen Seiten **pq** und **rs** die Gerade ω**O** in den Eckpunkten **h** und **k** des zu suchenden zweiten Quadrates treffen. Es ist mithin bloss **h** mit 1 und 3, **k** mit 2 und 4 zu verbinden, um das Bild dieses Quadrates zu erhalten, dessen zweite Diagonale **gi** die Seiten **af** und **bc** des ersten Quadrates in den Berührungspunkten 5 und 6 schneidet. Man berücksichtige bei allen diesen Konstruktionen den Zusammenhang mit dem Satze 1 in § 145.

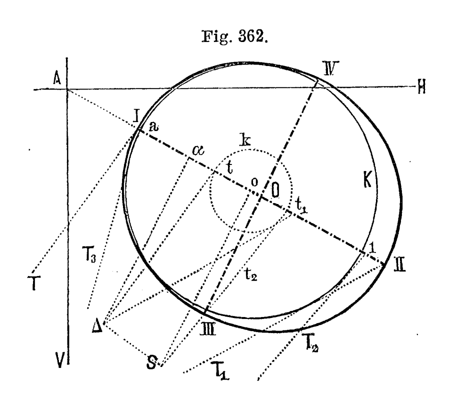
§ 458.

Kugelperspektive.

Der Umriss der Kugel wird zumeist nach der im § 337 angegebenen Methode gesucht. Sehr einfach können jedoch die senkrechten Achsen desselben gefunden und über denselben die Ellipse, als welche sich der Umriss perspektivisch darstellt, aus vier Kreisbögen mit hinreichender Genauigkeit zusammengesetzt werden, da die Achsendifferenz in allen praktischen Fällen äusserst gering ist.

Ist **o** [Fig. 362] der Kugelmittelpunkt und **K** der in der Bildfläche liegende grösste Kreis der Kugel, so denke man sich an diese einen berührenden Kegel aus dem Projektionscentrum als Spitze, und einen zweiten auf der Bildfläche senkrechten, berührenden Kegel gelegt, dessen Höhe die Distanz **D** ist.

Fig. 362.



Schneidet man beide Kegel durch eine Ebene, welche durch das Centrum und die Gerade **Ao** geht und dreht dieselbe um **Ao** in die Bildebene, so gelangt das Centrum in die im Punkte **A** auf **Ao** gefällte Senkrechte, während die Spitze des zweiten Kegels in das im Punkte **o** auf **Ao** errichtete Perpendikel **So** fällt. Die aus den beiden umgelegten Kegelscheiteln an den Kreis **K** gezogenen Tangenten **T**, T_1, T_2, T_3 schneiden auf **Ao** Längenstücke ab, welche beziehungsweise den beiden zu suchenden Achsen gleich sind.

Die grosse Achse wird durch die aus dem umgelegten Centrum gezogenen Tangenten in den Punkten **I** und **II** begrenzt, wäh-

rend das durch die beiden anderen Tangenten begrenzte Stück der Geraden **Ao**, als kleine Achse, auf die im Halbierungspunkte **O** der Länge **I II** errichtete Senkrechte zu übertragen ist, woselbst mithin **OIII** = **OIV** = **o1** wird.

Fallen die umgelegten Spitzen, wie dies zumeist der Fall ist, ausser die Zeichnungsfläche, so wird man ebenso einfach mit Benützung von aliquoten Teilen der Distanz zum Ziele gelangen.

Kann man beispielsweise bloss den dritten Teil der Distanz in Anwendung bringen, so teile man **Ao** in drei gleiche Teile, so dass $\mathbf{o}\alpha = \frac{1}{3}\mathbf{Ao}$ wird, errichte in α und **o** die Senkrechten $\alpha\Delta$ und **oS** auf **Ao** und trage auf denselben die Längenstücke $\alpha\Delta = \mathbf{oS}$ gleich dem dritten Teile der Augdistanz **D** auf; beschreibe ferner aus **o** den Kreis **k** mit Ein Drittel des Halbmessers vom Kreise **K** als Radius, führe aus den Punkten Δ und **S** die Tangenten $\Delta\mathbf{t}$, $\Delta\mathbf{t}_1$, $\mathbf{St}_2$ an den Kreis **k** und ziehe schliesslich die fraglichen Tangenten $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ parallel zu den letztbezeichneten an den Kreis **K**.

Dass **o1** die kleine Halbachse des Umrisses ist, folgt daraus, dass die Bildflächtracen der beiden, aus dem Centrum an die zweite Kegelfläche gelegten Berührungsebenen zu einander und zu **Ao** parallel sind, daher als Tangenten an den Umriss den Endpunkten der kleinen Achse desselben entsprechen und in einem Abstande sich vorfinden, welcher dem Durchmesser des Basiskreises vom zweiten Kegel gleich ist.

§ 459.

Bemerkungen über die Verzeichnung des perspektivischen Grundrisses.

Die Objekte stehen entweder mit einer Seitenfläche parallel und mit der anderen senkrecht zur Bildfläche (frontal), oder die aufeinander senkrecht stehenden Seitenflächen sind gegen die Bildebene unter 45° geneigt, oder endlich schliessen die Seitenflächen verschiedene Winkel mit der Bildebene ein.

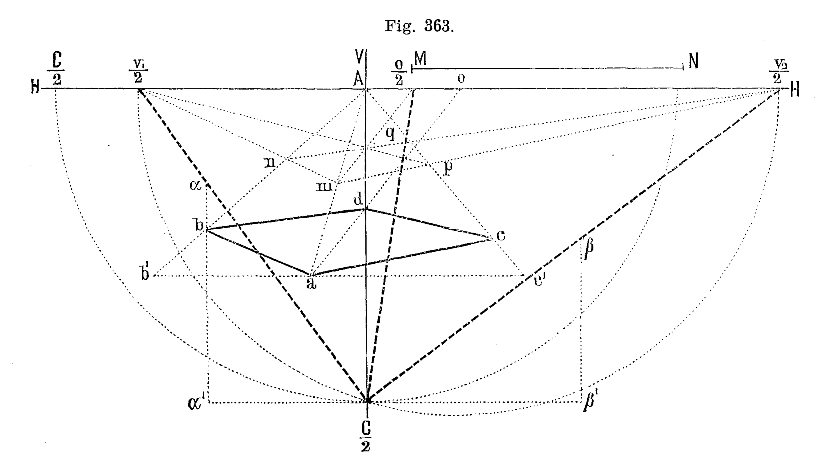
Im ersten Falle hat man horizontale, zur Bildfläche parallele und beziehungsweise im Hauptpunkte verschwindende Gerade zu verzeichnen; im zweiten Falle verschwinden die horizontalen Kanten in den Distanzpunkten und man erhält die sogenannte „Ansicht übers Eck“; im dritten Falle endlich sind vorerst die Fluchtpunkte der betreffenden Kanten auszumitteln. Letztere fallen

jedoch gewöhnlich ausserhalb der Grenzen der Zeichnungsfläche, daher man sich mit aliquoten Teilen ihrer Entfernung vom Aug- oder Hauptpunkte behelfen muss. Ein einfaches Verfahren, welches in einem solchen Falle angewendet werden kann, ist folgendes.

Es seien beispielsweise **ab** und **ac** [Fig. 363] die Perspektiven zweier in **a** sich schneidender Geraden, welche in einer horizontalen Ebene liegen und einen rechten Winkel einschliessen; man soll die diesen Geraden entsprechende Augdistanz unter der Bedingung auffinden, dass **ab** und **ac** die Richtungen der Perspektiven der Seiten eines Quadrates von gegebener Kantenlänge **MN** darstellen, dessen Eckpunkt **a** der Schnitt von **ab** und **ac** ist.

Auf den ersten Blick ist ersichtlich, dass die Fluchtpunkte v_1 und v_2 dieser beiden Geraden ausser die Zeichnungsgrenze

Fig. 363.



fallen. Um daher aliquote Teile der Entfernungen Av_1, Av_2 zu erhalten, teile man die Gerade **Aa** geometrisch in so viel gleiche Teile, als man die Abstände der Fluchtpunkte v_1 und v_2 von **A** zu teilen sich veranlasst sieht, d. h. so, dass der erste Teilpunkt dieser Entfernungen noch innerhalb der Zeichnungsfläche zu liegen kömmt.

Hier wurde die Konstruktion mit den halben Entfernungen durchgeführt; man hat also **aA** im Punkte **m** zu halbieren und durch **m** die Parallelen zu **ac** und **ab** zu führen, um im Schnitte derselben mit der Horizontslinie die Halbierungspunkte $\frac{v_1}{2}$, $\frac{v_2}{2}$ der Längen Av_1, Av_2 zu erhalten.

Behufs Auffindung der Distanz **D** denke man sich durch v_1 und v_2 die den Geraden entsprechenden Flucht- oder Parallelstrahlen geführt, welche sich selbstverständlich im umgelegten Projektionscentrum **C** schneiden und einen rechten Winkel einschliessen. Es werden demnach auch die durch $\frac{v_1}{2}$, $\frac{v_2}{2}$ zu den vorbezeichneten Fluchtstrahlen parallel gezogenen Geraden einen rechten Winkel bilden, sich jedoch in einem Punkte der aus dem Projektionscentrum auf die Bildfläche gefällten Senkrechten schneiden, welcher von der Bildebene um die halbe Distanz absteht.

Legt man die Horizontalebene samt den eben genannten Geraden in die Bildfläche um, so wird der besagte Schnittpunkt $\frac{C}{2}$ im Perpendikel $A\frac{C}{2}$ zu **HH** liegen, während die Punkte $\frac{v_1}{2}$, $\frac{v_2}{2}$ als in der Drehungsachse befindlich, ungeändert bleiben. Da die umgelegten Geraden $\frac{v_1}{2}\frac{C}{2}$ und $\frac{v_2}{2}\frac{C}{2}$ einen rechten Winkel einschliessen, so wird der Punkt $\frac{C}{2}$ nach vollbrachter Drehung erhalten, wenn man über $\frac{v_1}{2}\frac{v_2}{2}$ als Durchmesser einen Halbkreis beschreibt und diesen mit der Geraden $A\frac{C}{2}$ zum Schnitte bringt. Es ist somit $A\frac{C}{2}$ die halbe Augdistanz, d. i. $\frac{D}{2}$.

Was den zweiten Teil unserer Aufgabe betrifft, nämlich auf den Seitenrichtungen **ab** und **ac** Stücke abzuschneiden, die der gegebenen Strecke **MN** gleich sind, so ist es zweckmässig, von dem bereits umgelegten rechten Winkel $\frac{v_1}{2}\frac{C}{2}\frac{v_2}{2}$ sofort Gebrauch zu machen.

Vorausgesetzt, dass **a** in der Bildfläche liegt, mache man $\frac{C}{2}\alpha = \frac{C}{2}\beta = MN$, bestimme die Projektionen dieser Längen auf der Horizontalen $\alpha'\beta'$, übertrage diese Stücke $\frac{C}{2}\alpha'$, $\frac{C}{2}\beta'$ auf die durch **a** gezogene Horizontallinie nach ab', ac' und ziehe schliesslich die bildflächprojizierenden Geraden $b'A$, $c'A$, welche auf den Perspektiven der gegebenen Geraden die bestimmte Länge abschneiden.

In vielen Fällen lässt sich auch der Teilungspunkt, oder ein aliquoter Teil seines Abstandes vom Hauptpunkte **A** mit Vorteil benützen. Auch ist zu empfehlen, den Fluchtpunkt **o** der Diagonale aufzusuchen, welcher sich bekanntlich einfach ergibt, wenn man den rechten Winkel bei $\frac{C}{2}$ halbiert, die Halbierungslinie mit der Horizontslinie **HH** zum Schnitt bringt und $Ao = 2 \cdot A\frac{o}{2}$ macht.

Hat man endlich aus irgend einem Punkte gegen die Fluchtpunkte v_1, v_2 Geraden zu ziehen, so sind hierzu die Punkte $\frac{v_1}{2}$, $\frac{v_2}{2}$ oder allgemein $\frac{v_1}{n}$, $\frac{v_2}{n}$ derart zu benützen, dass man den gegebenen Punkt mit dem Hauptpunkte **A** verbindet, diese Gerade in zwei oder allgemein in **n** gleiche Teile teilt, den dem Hauptpunkte **A** nächsten Teilpunkt mit $\frac{v_1}{n}$ und $\frac{v_2}{n}$ vereint und aus dem gegebenen Punkte zu letzteren Geraden die geometrisch Parallelen zieht.

Zur Verzeichnung des vorerwähnten Quadrates **abcd** wird man also durch **b** und **c** zu den Geraden $n\frac{v_2}{2}$, resp. $p\frac{v_1}{2}$ die Parallelen **bd** und **cd** führen, welche sich in einem Punkte **d** der Diagonale **ado** schneiden müssen.

Bezüglich der Konstruktion perspektivischer Grundrisse sei noch folgendes bemerkt.

In vielen Fällen ist es wünschenswert, jenen Teil des Zeichnungsblattes, auf welchem das perspektivische Bild herzustellen ist, so viel als möglich frei von Konstruktionslinien zu erhalten. Dies kann dadurch erreicht werden, dass man für den Fall, als unter der Bildgrenze noch Raum auf der Zeichnungsfläche zur Verfügung steht, das Auge oder Projektionscentrum samt der Horizontslinie und allen in ihr liegenden Punkten, sowie die Ebene des perspektivischen Grundrisses, beliebig tief in vertikaler Richtung verschiebt und in dieser neuen Stellung die Perspektive des Grundrisses verzeichnet.

Es ist einleuchtend, dass sich hier die gegenseitigen Verhältnisse der Grundrisse nicht ändern, und dass demnach auch alle vertikalen Linien, die in den einzelnen Punkten des Grundrisses zu

errichten sind, dieselben bleiben, da die Verschiebung in vertikaler Richtung vorgenommen wurde.

Bevor wir diese Methode in ihrer Anwendung zeigen, wollen wir vorher noch die „Höhenbestimmung“ näher besprechen.

§ 460.

Höhenbestimmung einzelner Punkte.

Hat man die Perspektive des Grundrisses ermittelt, so sind zur Auffindung der einzelnen Punkte des Bildes bloss auf den hierzu Senkrechten die gegebenen Entfernungen von der Grundebene auf bekannte Weise perspektivisch abzuschneiden.

Aus dem vorher angedeuteten Grunde jedoch (um nämlich auf der Fläche des Bildes nicht zu viele Konstruktionslinien zu erhalten) kann man die Höhenbestimmung sämtlicher vertikalen Geraden in einer einzigen Vertikalebene vornehmen, welche man wieder samt dem Auge (Centrum) parallel zu sich selbst in horizontaler Richtung so weit fortgeschoben denkt, bis der Haupt- oder Augpunkt an die Grenze der Bildfläche, oder wenigstens nahe an dieselbe zu liegen kömmt.

Da in der so erhaltenen Ebene die Höhenbestimmung ausserhalb des darzustellenden Bildes vorgenommen wird, so ist der Zweck erreicht, und es werden die zu suchenden Punkte selbst in den durch die eben bestimmten Höhenpunkte gezogenen Horizontallinien erhalten.

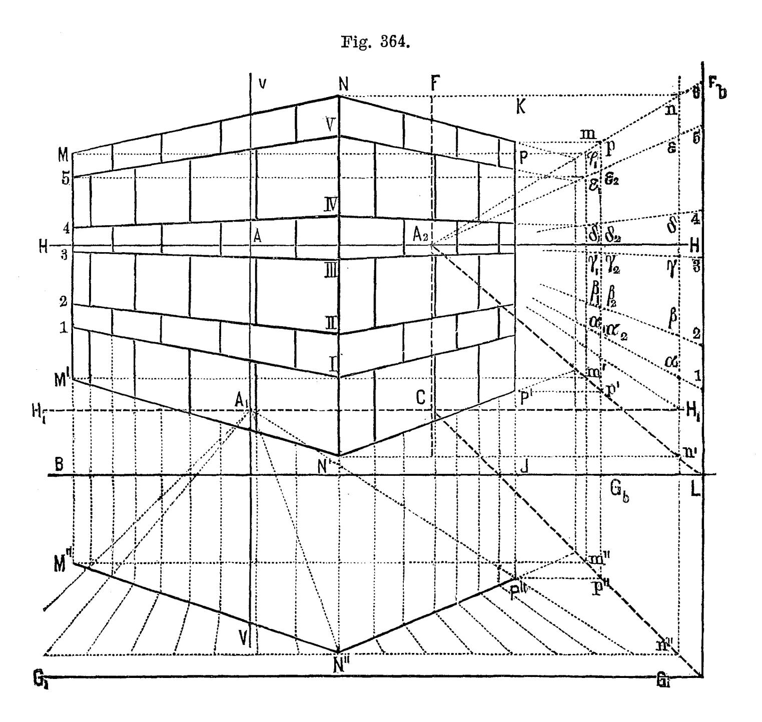
Es sei beispielsweise **BJK** [Fig. 364] die untere Horizontalgrenze des Bildes, und auf der Zeichnungsfläche nach unten und rechts ein freier Raum benützbar. **BJ** sei zugleich die Bildflächtrace G_b der Grundebene **GE**, auf welcher eine durch rechteckige Seitenwandungen begrenzte Mauer aufruht; **A** sei der Hauptpunkt, **HH** die Horizontslinie.

Denken wir uns die Grundebene oder eine andere Horizontalebene samt dem Centrum so lange vertikal nach abwärts bewegt, bis der Hauptpunkt nach A_1 gelangt, so wird A_1H_1 die neue Horizontslinie repräsentieren, während die Bildflächtrace G_1G_1 der neuen Horizontalebene, je nach Massgabe des nach unten zu Gebote stehenden Raumes, mehr oder weniger tief unter A_1H_1 angenommen werden kann.

Selbstverständlich werden alle in der früheren Horizontslinie **HH** sich befindlichen Fluchtpunkte, Teilungspunkte u. s. w., sowie die Distanzpunkte vertikal in die neue Horizontslinie herab versetzt

werden müssen. In der so fixierten Grundebene konstruiere man nun den Grundriss **$M''N''P''$** der im Bilde sichtbaren Mauerfronten.

Fig. 364.



Auf gleiche Weise denke man sich eine beliebige vertikale, auf der Bildfläche senkrechte Ebene, gleichsam als vertikale Projektionsebene für die gleichnamigen Kanten, in horizontaler Richtung samt dem Auge (Projektionscentrum) beliebig weit nach rechts versetzt, so dass beispielsweise die Vertikallinie **VV** nach **CF** und der Hauptpunkt **A** nach **A_2** gelangt. Die Bildflächtrace **F_b** dieser Vertikalebene kann beliebig gewählt werden.

Die Bildflächtracen **G_1G_1** und **F_b** der gewählten Horizontal- und Vertikal-Ebene schneiden sich in **G_1** und die neue Horizontallinie **H_1H_1** trifft die Vertikallinie **CF** in **C**; es wird mithin **CG_1** die Schnittlinie dieser beiden Ebenen bestimmen. Auf gleiche Weise kann die Gerade **A_2L** (**L** Schnittpunkt von **F_b** mit der früheren Bildflächtrace **$G_b = BJ$**) als der Schnitt der Grundebene **GE** mit der neuen Vertikalebene betrachtet werden.

Um die Grundrisslinien der Mauern zu erhalten, wird man beispielsweise für den Punkt **M''** die Horizontale **$M''m''$** bis zum

Schnitte **m''** mit **CG$_1$** ziehen und in **m''** und **M''** die Perpendikel **M''M** und **m''m** errichten, von welchen das letztere die Gerade **A$_2$L** in **m'** trifft. Die durch **m'** gezogene Horizontale **M'm'** schneidet sich mit **M''M** in dem verlangten Punkte **M'**.

Weiter handelt es sich um den Punkt **M**, welcher von der Grundebene um die Mauerhöhe absteht. Zu diesem Zwecke ist vorerst auf **m'm** ein Stück abzuschneiden, welches der Mauerhöhe gleichkömmt, was bekanntlich dadurch bewerkstelligt wird, dass man auf der Bildflächtrace **F$_b$** die Strecke **L**6 gleich der Mauerhöhe aufträgt und 6 mit **A$_2$** verbindet, wodurch in der Geraden **m''m'** der Punkt **m** erhalten wird, durch welchen die Horizontale **Mm** gezogen, die Gerade **M''M'** in dem fraglichen Punkte **M** schneidet.

Auf gleiche Weise kann die Mauerkante **N'N** sowie jede andere Kante bestimmt werden, woraus ersichtlich ist, dass mittels der Geraden **A$_2$**6 die Höhenpunkte aller gleich hohen Mauerkanten bestimmt werden können.

Hat man derart die Grenzkanten der darzustellenden Mauer gefunden, und soll daselbst noch ein Steinschnitt, allenfalls von abwechselnd höheren und niederen Quadern angeordnet werden, so sind bloss die einzelnen Quaderhöhen von **L** gegen 6 nach den Punkten 1, 2, 3 . . . aufzutragen und diese Teilpunkte mit dem Augpunkte **A$_2$** zu verbinden. Diese Geraden werden auf den Vertikalprojektionen **mm'**, **nn'**, **pp'** der Kanten **MM'**, **NN'**, **PP'** jene Punkte α_1, β_1 . . ., α_2, β_2 . . . bestimmen, durch welche bloss die Horizontallinien zu ziehen sind, um auf den obgenannten Kanten die Teilpunkte 1, 2, 3 . . ., **I**, **II**, **III** . . . zu erhalten.

Aus diesem Beispiele ist ersichtlich, dass für gewisse Fälle die angeführte Methode mit Vorteil benützt werden kann, und dass insbesondere zur Bestimmung der Höhen verschiedener Punkte es geraten erscheint, sich einer einzigen Vertikalebene zu bedienen.

Darstellung verschiedener Objekte.

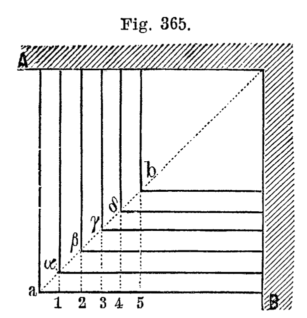
§ 461.

Stiegen.

Nehmen wir an, **A** und **B** [Fig. 365] wären zwei Mauerwandungen, beziehungsweise parallel und senkrecht zur Bildebene; es lehne sich an dieselben eine Stiege, welche, wie aus dem Grundrisse ersichtlich, zu beiden Seiten den Aufgang gestattet.

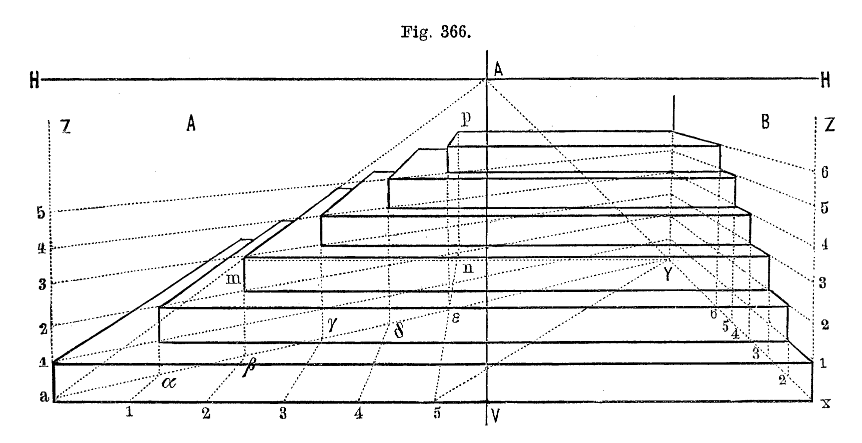
Das Profil in der Mauerfläche **B** [Fig. 366] wird auf bekannte Art und wie aus der Figur ersichtlich, konstruiert. Es werden sonach nur noch die Bilder der vertikalen Kanten der Stufen (in der freien Ecke **a**α β . . . **b** derselben) zu bestimmen sein. Betrachten wir den Grundriss [Fig. 365], so ist zu ersehen, dass sich die horizontalen Projektionen α, β, γ . . . dieser Kanten als die Eckpunkte der Diagonalen von Quadraten ergeben, welche die Stufenbreite zur Seite haben.

Fig. 365.



Trägt man also im Bilde auf **ax** [Fig. 366] die Stufenbreite entsprechend oft auf, zieht aus **a** eine unter 45° gegen die Bildfläche geneigte Gerade **aY** und verbindet die vorbezeichneten Teilpunkte 1, 2, 3 . . . mit dem Augpunkte **A**, so wird **aY** in den Fusspunkten α, β, γ . . . dieser Kanten geschnitten. In den so erhaltenen Punkten sind nun Vertikallinien zu errichten und von denselben bloss jene der Stufenhöhe gleichen Stücke zu benützen, welche innerhalb je

Fig. 366.



zweier, die Stufenhöhe begrenzenden (aus den Eckpunkten des Stiegenprofils der Mauer **B** geführten) Horizontallinien liegen.

Aus den so erhaltenen Eckpunkten sind die Stufenkanten gegen den Haupt- oder Augpunkt **A**, und zwar bis zum Schnitte mit der Mauerfläche **A** fortzusetzen. In jener Mauerfläche **A** wird schliesslich das Profil perspektivisch zu verzeichnen sein, welches, als zur Bildfläche parallel, in einer dem wirklichen Profil ähnlichen Form erscheint.

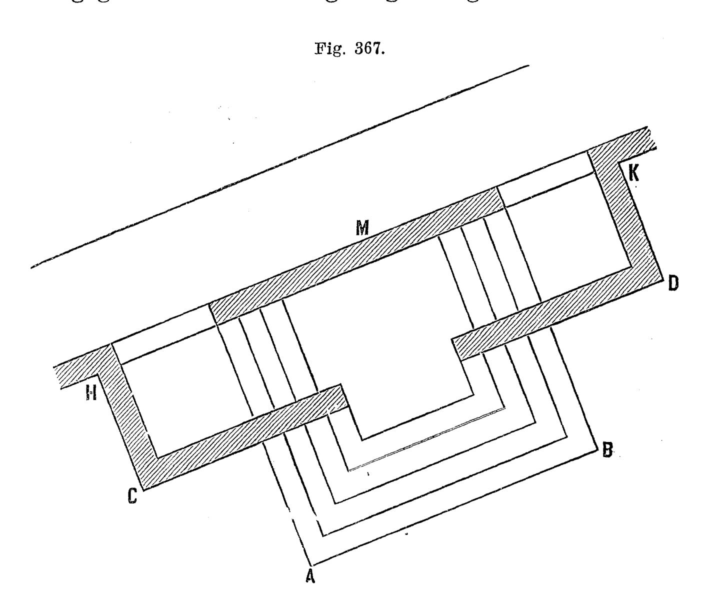
Zu diesem Behufe wird die letzte Teilungslinie 5A bis zum Schnitte n mit der Mauerwand A, sowie die Kante aA bis m zu verlängern und in n die Vertikale np bis zum Schnitte p mit der der höchstliegenden Platte angehörigen Grenzkante zu ziehen sein, wo dann bloss über mn als Breite und np als Höhe das ähnliche Profil zu verzeichnen ist. Die sich so ergebenden Kanten desselben werden jedoch nur teilweise sichtbar erscheinen.

Das Abschneiden der Stufenhöhen auf den in α, β, γ... errichteten Vertikallinien kann auch, ohne das Profil der Mauerfläche B zu benützen, derart geschehen, dass man in den beiden Punkten a und Y vertikale Geraden zieht, auf jeder derselben die Stufenhöhe entsprechend oft aufträgt und die gleich hoch gelegenen Punkte miteinander verbindet.

§ 462.

Eine grössere Stiegenanlage wurde in Fig. 368 dargestellt. Der Grundriss dieser Anlage sei in Fig. 367 gegeben. Dieselbe soll eine gegen die Bildebene geneigte Lage erhalten.

Fig. 367.



In erster Reihe ist es hier notwendig, die Fluchtpunkte der beiden Systeme von parallelen, und beziehungsweise aufeinander

senkrechten Geraden zu fixieren, um vermittels derselben den perspektivischen Grundriss verzeichnen zu können. Es sei **A** der Haupt- oder Augpunkt, $\frac{B}{4}$ und $\frac{B_1}{4}$ seien die vierten Teile der Entfernungen der obgenannten Flucht- oder Verschwindungspunkte von demselben, und $\frac{B}{4} D_1 \frac{B_1}{4}$ sei der umgelegte oberwähnte rechte Winkel. Mit Zugrundelegung dieser Daten ist die Perspektive des Grundrisses oder wenigstens der wichtigsten Teile desselben aufzufinden. Hier wurde keine neue Grundebene gewählt, sondern die Konstruktion sogleich in der horizontalen Ebene des Terrains durchgeführt.

In einem solchen Falle ist es zweckmässig, eine Vertikalebene behufs der „Höhenbestimmung" anzuwenden. Es wurde daselbst der Augpunkt nach A_2 versetzt und die Vertikale **JZ** als die Bildflächtrace der Vertikalebene, A_2J daher als deren Grundflächtrace angenommen. Auf **JZ** ist nun von **J** die Stufenhöhe entsprechend oft aufzutragen, und sind die Teilpunkte 1, 2, 3 . . . mit A_2 zu verbinden.

Die Konstruktion des Bildes besteht der Hauptsache nach in der Verzeichnung der einzelnen Profile.

Nachdem der Punkt **a** in der Bildebene liegend vorausgesetzt wurde, so stellt sich die in diesem Punkte aufsteigende, vertikale Stufenkante in ihrer wahren Länge dar. Ist **O** der Fluchtpunkt der Diagonale, so ist **aO** jene Gerade, in welcher sich die Projektionen der Stufenkanten 1 . . . 4 vorfinden müssen. Errichtet man in den so erhaltenen Projektionen die Perpendikel auf **HH**, trägt auf die in **a** errichtete Vertikale die Stufenhöhe (diesfalls) fünfmal auf und verbindet sodann die Teilpunkte mit **O**, so sind die vertikalen Stufenkanten bestimmt. Auf gleiche Weise werden jene Kanten gefunden, welche in der durch **b** gelegten vertikalen Diagonalebene liegen.

Noch einfacher ergeben sich die in der Mauerfläche **cd** liegenden Stiegenprofile. Verlängert man nämlich **cd** bis zum Schnitte **f** und **g** mit der Horizontalen $af = GJ$ (Bildflächtrace der horizontalen Ebene des Terrains) und der Trace A_2J, trägt sodann auf der in **f** errichteten Vertikalen die Stufenhöhe **h** wieder fünfmal auf und zieht in **g** eine Vertikale, welche durch die anfangs geführten Teilungslinien entsprechend geteilt wird, so sind nur die gleichnamigen Punkte beider Vertikalen zu verbinden, um die hori-

zontalen Profilkanten zu erhalten. Die vertikalen Stufenkanten sind so wie vorher in den betreffenden Punkten des Grundrisses zu errichten. Die zusammengehörigen Punkte der einzelnen Profile entsprechend verbunden, werden die Stufen des ersten Stiegenarmes der Anlage geben.

Von den zunächst folgenden Stiegenarmen sind bloss die rechtsliegenden Stufen teilweise sichtbar. Man verzeichne also das in der Mauer **M** [Fig. 367] liegende Profil $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varphi$ [Fig. 368] auf gleiche Weise wie jenes in der Mauerfläche **cd**, wobei nur zu berücksichtigen ist, dass die der Mauerfläche **M** zugehörige Grundrisslinie **hk** nicht so weit verlängert werden kann, bis sie die Horizontale **af** innerhalb den Grenzen der Zeichnungsfläche schneidet.

Man nehme daher einen beliebigen Punkt **h** der Geraden **hk** an, ziehe durch denselben die Horizontale hh_1 bis zum Schnitte h_1 mit der Trace A_2J und errichte in h_1 ein Perpendikel auf **HH**, welches durch die Teilungslinien in den Punkten 6 bis 9 getroffen wird. Letztere Punkte sind nun horizontal auf die in **h** errichtete Vertikale zu übertragen, um diese entsprechend zu teilen. Die Gerade **hk** schneidet verlängert A_2J in **l**, daher die in **l** errichtete Vertikale ebenfalls in den Punkten 6 bis 9 geteilt erscheint. Je zwei gleichbenannte Teilpunkte verbunden, werden innerhalb der durch den Grundriss bestimmten Profilkanten $\alpha\alpha'$, $\gamma\gamma'$ . . . die horizontalen Kanten des Profils geben. Aus den einzelnen Ecken des letzteren sind die horizontalen Stufenkanten gegen den gemeinschaftlichen Flucht- oder Verschwindungspunkt B_1 der besagten Kanten zu ziehen, oder es können dieselben, falls sich B_1 nicht mehr innerhalb des zur Benützung stehenden Raumes vorfände und man keine weiteren Hilfskonstruktionen anwenden wollte, mit Benützung des in der Mauerebene **cd** zu verzeichnenden Profils gefunden werden. Hieraus ist gleichzeitig ersichtlich, dass es für die Bequemlichkeit der Ausführung resp. Herstellung des perspektivischen Bildes vorteilhaft sei, wenn einer der beiden vorbezeichneten Fluchtpunkte (wie dies hier der Fall ist) noch auf die Zeichnungsfläche fällt.

Endlich sind noch rechts jene Stufen zu verzeichnen, welche in der Fortsetzung der Mauerfläche **M** liegen. Zu diesem Zwecke schneide man auf der Geraden $m\varphi$ die Stufenhöhen ab, wobei die eine in der genannten Geraden verbleibt, die andere jedoch um eine Stufenbreite zurückversetzt werden muss. Die horizontalen Stufenkanten sind gegen den Fluchtpunkt **B** zu ziehen.

Die Stiegenmauern wurden stufenförmig abgesetzt. Die perspektivische Darstellung derselben unterliegt keinen Schwierigkeiten. Die Höhe der Mauer über den Stufen kann beliebig gewählt werden, während die Mauerstärke, die hier gleich der Stufenbreite angenommen wurde, aus dem gegebenen Grundrisse zu entnehmen ist.

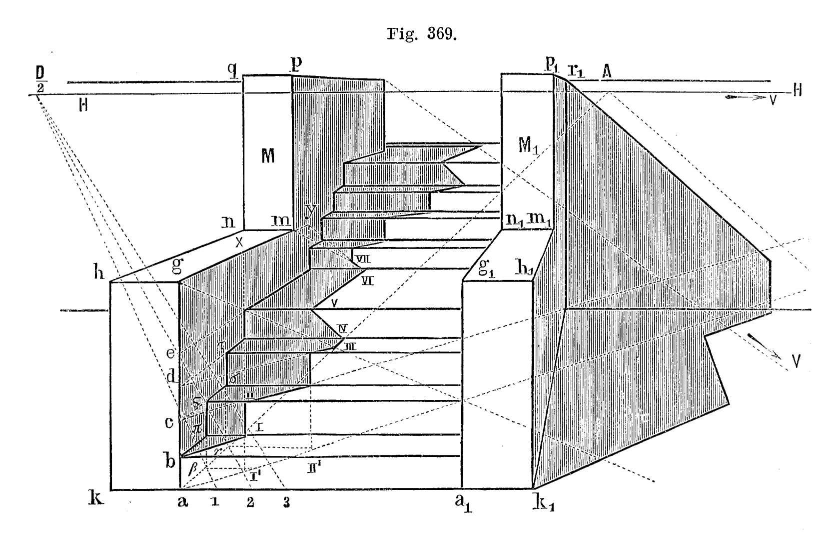
§ 463.

190. Aufgabe: **Eine Stiege mit zur Bildebene parallelen Stufen ist zu beiden Seiten von stufenförmig aufsteigenden Mauern begrenzt; die Selbst- und Schlagschatten des Objektes sind zu bestimmen.**

Zum Behufe der Konstruktion vorliegender Stiege sei noch folgendes in Kürze angeführt.

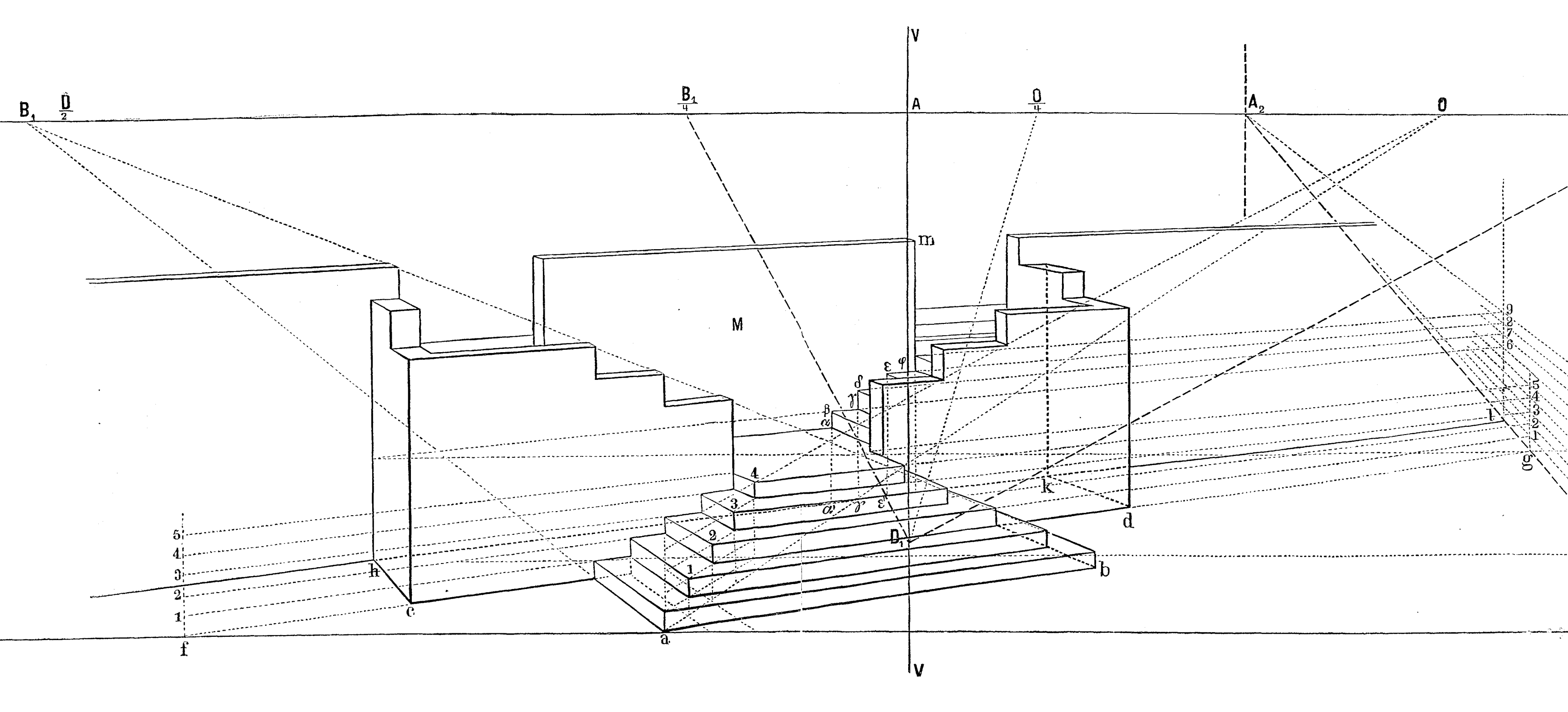
Es seien **akhg**, $a_1 k_1 h_1 g_1$ [Fig. 369] die Stirn- oder Frontflächen der beiden Seitenmauern **M** und M_1, und in deren Ebene **ab** = **h** die erste Stufenhöhe. Die Stufenbreite sei doppelt so gross als die Stufenhöhe. Man verbinde **a** mit dem Hauptpunkte **A**

Fig. 369.



und schneide auf dieser Verbindungsgeraden so viele Stufenbreiten ab, als Stufen vorkommen, wodurch man die Punkte β, γ . . . erhält. Auf **ag**, von **b** aus, die Stufenhöhe ebenso oft aufgetragen und die Teilpunkte **c**, **d**, **e** mit **A** verbunden, be-

Fig. 368.



stimmen die jeweiligen Schnitte der horizontalen Stufenebenen mit der Seitenwand.

Man hat nun in β, γ, δ . . . die Perpendikel auf **HH** zu errichten und davon jene Stücke, welche der Reihe nach zwischen je zwei in den gegebenen Abständen aufeinander folgenden Horizontalebenen liegen, also πρ, στ u. s. w. zu benützen. Die durch diese Punkte gezogenen Horizontalen repräsentieren sodann die Bilder der horizontalen, zur Bildebene parallelen Stufenkanten. Nach der vierten Stufe wurde ein Ruheplatz angenommen, hierauf die Stufen fortgesetzt und daselbst den Seitenmauern eine stufenförmige Erhöhung gegeben.

Die Fluchtpunkte der Lichtstrahlen und ihrer horizontalen oder Grundfläch-Projektionen seien beziehungsweise **V** und **v** (beide ausserhalb der Zeichnungsfläche).

Zuvörderst ist ersichtlich, dass die Kante **ag** die Schattengrenze der im Selbstschatten liegenden inneren Mauerfläche bildet, und dass diese letztere ihren Schatten auf die einzelnen Stufen wirft. Dieser Schatten beginnt offenbar in **b**, und ist bloss **b** mit **v** zu verbinden, um sofort den Schatten **bI** auf der ersten horizontalen Stufenebene **b**π zu erhalten. Auf der Vertikalebene πρ wird der diesbezügliche Schatten vertikal durch **I II** begrenzt, und ist diese Grenzlinie auf der zweiten horizontalen Stufenebene von **II** aus gegen den Punkt **v** bis zum Schnitte mit der Horizontalen aus dem vorher erhaltenen Punkte σ fortzusetzen. Ein Gleiches wiederholt sich bei allen folgenden Stufen. Letztgenannte Schattengrenze **II v** muss selbstverständlich nach dem Punkte **c** gerichtet sein, und man wird, um deren Bestimmung von dem erst gefundenen Punkte **II** unabhängig zu machen und um eine Kontrolle für die Genauigkeit der Arbeit zu haben, dieselbe jedenfalls gleich im vorhinein durch **c** ziehen.

Würden sich die Schnitte der Geraden **bv**, **cv** . . . mit den durch π, ρ . . . gezogenen Horizontalen sehr schief ergeben, so kann man die vertikalen Schattengrenzen auch mit Hilfe der durch **ak** gehenden Horizontalebene bestimmen. Verbindet man nämlich **a** mit **v**, so stellt **av** die Grundflächtrace der durch **ag** gelegten Lichtebene vor, und zieht man durch β, γ, δ . . . die Horizontalen β**I'**, γ**II'** . . . als Tracen der zur Bildebene parallelen Stufenhöhenebenen πρ, στ . . . bis zum Schnitte **I'**, **II'** . . . mit der ersteren Trace, so bestimmen die durch diese Punkte geführten Vertikalen die Schattengrenzen in den bezüglichen Ebenen.

Verbindet man den Eckpunkt **g** mit dem Fluchtpunkte **V**, so trifft dieser Lichtstrahl eine der eben gefundenen Schattengrenzen im Punkte **III**, weshalb von **III** angefangen die zur Bildebene senkrechte Mauerkante **gm** schattenwerfend wird. Von dem Schatten dieser Geraden entfällt der Teil **III IV** auf die durch τ gehende Horizontalebene; es ist demnach die Begrenzungsgerade **III IV** gegen den Haupt- oder Augpunkt **A** zu ziehen. Der weitere Teil **IV V** der Schattengrenze wird parallel zu **AV** sein, da **AV** die Fluchttrace der zu den Lichtstrahlen parallelen und zur Bildebene senkrechten Ebenen darstellt, kann jedoch auch bestimmt werden, indem man die vertikale Stufenkante bis zum Schnitte **x** mit der horizontalen Mauerkante **gm** verlängert und **x** mit **IV** verbindet; denn würde man die betreffende Ebene fortsetzen, so erhielte man den Punkt **x** als Schnitt derselben mit der Kante **mg**, und somit auch seinen eigenen Schatten.

Auf dem angeordneten Ruheplatze ist **V VI**, als die Fortsetzung der Schattengrenze, gegen den Augpunkt **A** zu ziehen; bei **VI** wiederholt sich die gleiche Konstruktion wie bei **IV V**. In **VII** erhalten wir den Schatten des Punktes **m**, von wo aus die Mauerwerkkante **mp** schattenwerfend wird. Die weitere Konstruktion ist der anfangs durchgeführten gleich.

Bei der Seitenmauer M_1 ist die Ausenseite $k_1 h_1 n_1 p_1 r_1$ im Selbstschatten; die Begrenzung derselben bildet gleichzeitig die schattenwerfenden Kanten für den auf die Grundebene und den auf die rückwärtige Mauerfläche fallenden Schlagschatten, dessen Grenzen anstandslos als der Schnitt von Ebenen mit Ebenen gefunden werden können.

§ 464.

Die Schraubenlinie.

Bei der Darstellung von Schrauben, Wendeltreppen u. s. w. findet eine Raumkurve, die „Schraubenlinie" praktische Verwertung, daher deren Konstruktion an dieser Stelle besprochen werden soll.

Für Raumkurven wird es zumeist am zweckmässigsten sein, sich vorerst die Perspektive ihrer Grundflächprojektion und die einer Vertikalprojektion zu verzeichnen, um sodann einzelne Punkte des perspektivischen Bildes der Kurve als Durchschnitte der betreffenden projizierenden Strahlen zu erhalten.

Hat die darzustellende ebene oder Raumkurve besondere Eigenschaften, so wird man diese in vielen Fällen mit Vorteil zur Konstruktion des perspektivischen Bildes benützen können. Ein einfaches Beispiel bietet diesfalls die Schraubenlinie.

So wie in der orthogonalen Projektion wollen wir auch hier bei Verzeichnung dieser Kurve von der wichtigsten Eigenschaft derselben, dass sie nämlich in jedem Punkte eine gleiche Neigung gegen eine bestimmte Ebene hat, ausgehen. Daraus folgt, dass gleichen Längenstücken der Projektion dieser Kurve auf die gegebene Ebene auch eine gleich grosse Höhenzunahme in bezug auf eine darauf senkrechte Richtung entspricht.

Wir wollen hier nur den einfachsten, jedoch am häufigsten vorkommenden Fall betrachten, wo die Schraubenlinie in der Oberfläche eines senkrechten Cylinders mit kreisförmiger Leitlinie liegt, und letzteren so stellen, dass seine Achse parallel zur Bildfläche und vertikal, d. i. senkrecht zur Grundebene (horizontale Ebene) zu stehen kommt.

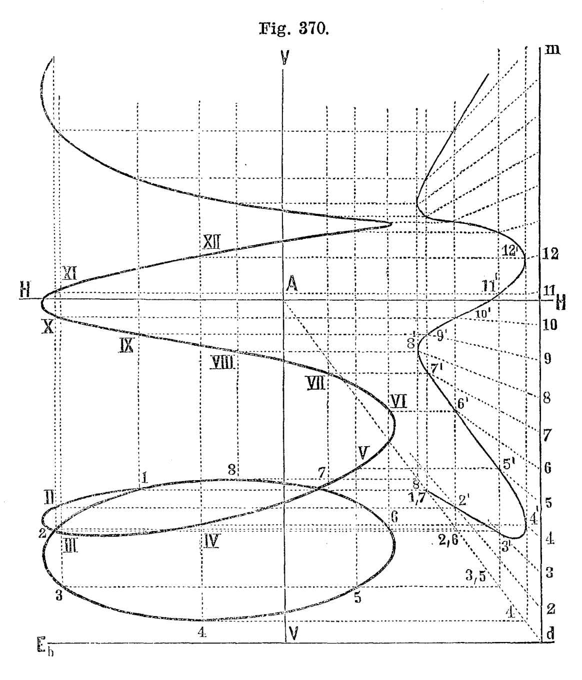
Ist sonach E_b [Fig. 370] die Bildflächtrace der besagten horizontalen Ebene E, so wird in dieser vorerst ein Kreis zu verzeichnen und dessen Peripherie in eine beliebig grosse Anzahl gleicher Teile zu teilen sein. Die in den Teilpunkten errichteten Vertikalen werden sodann die einzelnen Lagen der Erzeugenden einer Cylinderfläche vorstellen, welche sämtlich von der zu verzeichnenden Kurve so geschnitten werden, dass der Höhenunterschied je zweier Durchschnittspunkte dem zwischen den betreffenden Erzeugenden in der Basisebene liegenden Kreisbogen proportional ist, woraus folgt, dass diese vertikalen Geraden nunmehr bloss nach dem angegebenen Entstehungsgesetze der zu verzeichnenden Kurve zu teilen sind, um einzelne Punkte derselben zu erhalten.

Ist die Perspektive eines Kreises derart verzeichnet, dass man unmittelbar die Bilder jener Punkte sucht, in welchen der Kreis in eine beliebige Anzahl gleicher Teile (am besten eine durch 8 teilbare Zahl), hier in 8, geteilt wurde, so wird die Teilung der in diesen Punkten errichteten Vertikalen vorzunehmen sein. Zu letzterem Zwecke muss noch die Ganghöhe oder Steigung h der Schraubenlinie, d. i. der Höhenunterschied zweier Punkte der Schraubenlinie, welchen eine ganze Kreisperipherie entspricht, bekannt sein.

Zieht man nun in der Bildebene irgend eine auf die Bildflächtrace E_b senkrechte Gerade dm, trägt auf dieselbe die Ganghöhe $h = d8$ auf und teilt diese in ebenso viele gleiche Teile als den Kreis, so kann die besagte Gerade dm als Bildflächtrace einer vertikalen Ebene betrachtet werden, deren Verschwindungslinie oder Fluchttrace die Vertikallinie VV ist.

Unter dieser Voraussetzung fällt der Haupt- oder Augpunkt A mit dem Teilungspunkte für alle in dieser Ebene befindlichen ver-

Fig. 370.



tikalen Geraden zusammen. Denkt man sich weiter die einzelnen Erzeugenden der Cylinderfläche auf diese Vertikalebene projiziert, so werden die Perspektiven der Fusspunkte 1 bis 8 dieser Erzeugenden in die Schnittgerade Ad der beiden vorbezeichneten Ebenen derart fallen, dass je zweien dieser Punkte dieselbe Projektion zukömmt, weshalb die Projektionen von je zweien, gleich weit hinter der Bildebene liegenden Erzeugenden, in einer und derselben vertikalen Geraden sich ergeben werden. Verbindet man nun die einzelnen Teilpunkte der Geraden dm mit A, so werden durch dieselben die Projektionen der Erzeugenden der Reihe nach in 2', 3' . . . geschnitten.

Behufs Auffindung der den einzelnen Erzeugenden entsprechenden Punkte der Schraubenlinie hat man nur zu berücksichtigen, dass der betreffende Schnittpunkt jeder einzelnen Erzeugenden in einer Höhe zu suchen sein wird, welche dem Abstande des Fusspunktes derselben vom Ausgangspunkte 1 proportional ist.

Werden nun die so gefundenen Punkte aus der Projektion in die betreffenden perspektivisch dargestellten Cylinder-Erzeugenden zurückgeführt, was selbstverständlich durch horizontale Gerade geschieht, so erhält man einzelne Punkte der Schraubenlinie für ein Gewinde.

Sind mehrere Gewinde zu verzeichnen, so kann entweder auf **dm** die Teilung weiter fortgesetzt und in gleicher Weise wie bei der ersten Windung vorgegangen werden, oder es kann, da der bewegliche Punkt bei jedem Umgang um den Cylinder eine gleiche Höhe durchläuft und die Erzeugenden parallel zur Bildfläche sind, die Bestimmung weiterer Punkte so vorgenommen werden, dass man von jedem in der ersten Windung bestimmten Punkte auf der zugehörigen Erzeugenden die Schraubenganghöhe (in der Länge wie sie sich in der Perspektive an der betreffenden Stelle ergibt und in der Projektion abgenommen werden kann), so oft mal aufträgt, als man Gewinde verlangt. Bei der Verbindung der einzelnen Punkte ist zu beachten, dass sie in der Reihe vorzunehmen ist, wie die Erzeugenden der Cylinderfläche, in welchen die Punkte liegen, aufeinander folgen.

Eine interessante Konstruktionsweise bietet die Schraubenlinie in der Lage, wenn ihre Achse senkrecht auf der Bildfläche steht. Geht die Achse überdies noch durch den Aug- oder Hauptpunkt **A**, so ist die Perspektive der Schraubenlinie eine hyperbolische Spirale.

Die Konstruktion der Tangente an irgend einen Punkt der Kurve geschieht einfach dadurch, dass man in dem Fusspunkte der dem gegebenen Punkte zugehörigen Erzeugenden an den Kreis eine Tangente zieht, auf dieser eine Länge abschneidet, welche der abgewickelten Kreislinie, vom Anfangspunkte der Schraubenlinie bis zu dem Fusspunkte der Erzeugenden (mit Berücksichtigung des ein- oder mehrmaligen Umganges) gemessen, gleich ist, und den so gefundenen Punkt mit dem gegebenen verbindet.

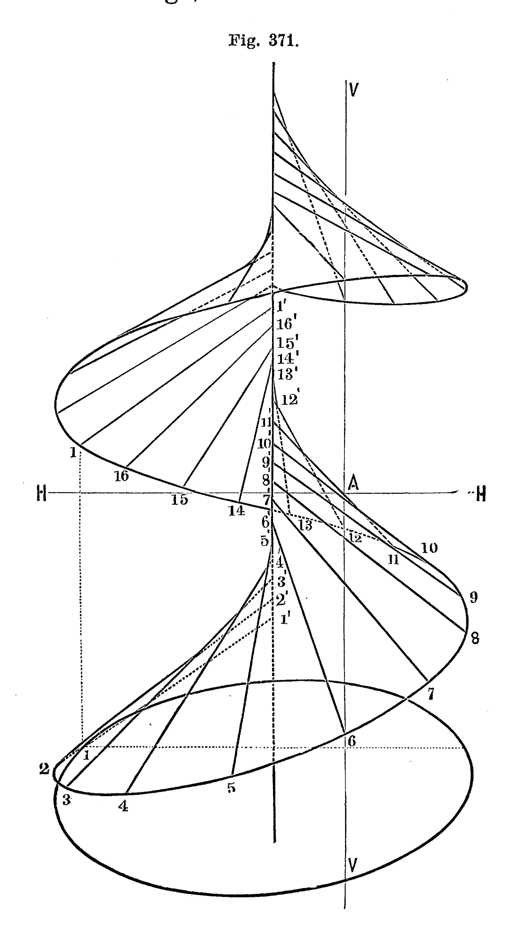
Als ein einfaches Beispiel für die Verwertung der Schraubenlinie bei der Darstellung von Flächen möge das folgende gelten.

§ 465.

Die windschiefe Schraubenfläche.

Diese Fläche entsteht, wenn sich längs einer Schraubenlinie eine Gerade so fortbewegt, dass sie stets die Schraubenlinie so-

Fig. 371.



wohl, als deren Achse schneidet und mit der letzteren einen konstanten Winkel einschliesst.

Wir wollen die besagte Achse vertikal annehmen und die Schraubenlinie so verzeichnen, dass wir einzelne in horizontaler, also auch in vertikaler Richtung gleich weit abstehende Punkte derselben bestimmen.

Hat man die Schraubenlinie konstruiert, so ziehe man durch jenen Teilpunkt, welcher sich in der durch die Achse parallel zur Bildfläche gelegten Ebene vorfindet, eine gerade Linie 11' [Fig. 371] derart, dass sie mit der Achse den gegebenen Winkel einschliesst, trage vom Punkte 1' derselben auf der Achse die Schraubenganghöhe so auf, dass 11 perspektivisch gleich 1' 1' wird und teile diese Strecke in ebenso viele gleiche Teile, als man Punkte der Schraubenlinie in einem Gange bestimmte.

Verbindet man hierauf die Teilpunkte der Achse der Reihe nach mit den gleichbezeichneten Punkten der Schraubenlinie, so erhält man verschiedene Lagen von Erzeugenden der Fläche, welche zu beiden Seiten der Achse von Kurvenästen umhüllt werden. Bis zu dieser Umhüllungskurve sind die einzelnen Erzeugenden sichtbar, während der andere Teil derselben durch den vorderen Teil der Fläche gedeckt erscheint.

§ 466.

191. Aufgabe: **Es ist eine halbkreisförmige Spindelstiege perspektivisch darzustellen.**

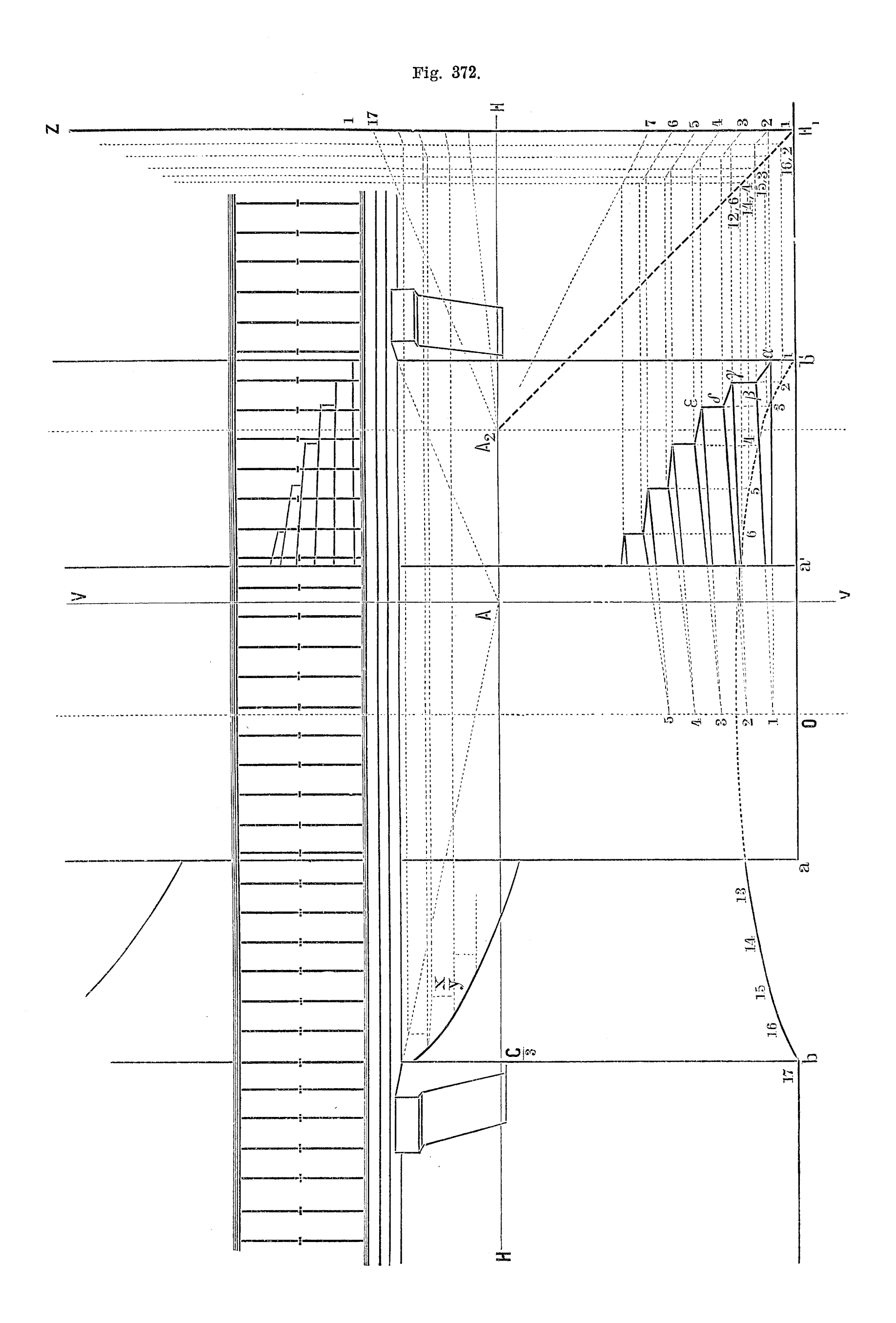
Es sei **O** [Fig. 372] der Mittelpunkt der Spindel, **Oa** der Radius derselben und **Ob** der Radius des Stiegenhauses. Die Stiege soll aus 17 Stufen bestehen (weshalb der über **Ob** als Radius verzeichnete Halbkreis in 16 gleiche Teile geteilt werden muss). Eine Stufenbreite **b** soll im Mittel der doppelten Stufenhöhe **h** gleich sein.

Diesfalls wird es, behufs Teilung der einzelnen Vertikallinien, zweckmässig sein, eine vertikale Hilfsebene zu benützen. Es sei also A_2 der verschobene Augpunkt, $H_1 Z$ die Bildflächtrace und demnach $A_2 H_1$ die Grundflächtrace derselben. Von den Teilpunkten 1 bis 16 des Halbkreises bb_1 projizieren sich je zwei in einem Punkte der Trace $A_2 H_1$.

Trägt man nun auf der Achse **O** des Stiegenhauses, sowie auf der Trace $H_1 Z$ die Stufenhöhe so oft auf, als Stufen vorhanden sind und verbindet die so erhaltenen Teilpunkte der Trace $H_1 Z$ mit A_2, so werden auf den in den einzelnen Punkten der Trace $A_2 H$ errichteten Vertikalen Strecken abgeschnitten, welche perspektivisch gleich der Stufenhöhe sind.

Errichtet man ferner in den Teilpunkten der Kreislinie vertikale Geraden, so werden in denselben die Schnitte der vertikalen Stufenseitenflächen mit der innern cylindrischen Mauerfläche des Stiegen-

Fig. 372.



hauses liegen. Es werden daher auf diesen Perpendikeln die Stufenhöhen aufzutragen sein, was, wie aus der Zeichnung ersichtlich ist, mittels der aus den entsprechenden Punkten der Vertikalebene gezogenen Horizontallinien bewerkstelligt wird. Auf diese Weise erhält man die aufeinander folgenden Stufenhöhen 1α, $\beta\gamma$, $\delta\varepsilon$ . . . und hat behufs deren Verbindung bloss noch die Schnitte der horizontalen Stufenflächen mit der Stiegenhausmauer, welche Kreisbogenstücke sind, zu verzeichnen.

Bei einiger Übung wird es behufs Verzeichnung dieser Ellipsenteile nicht erst notwendig sein, weitere Bestimmungsstücke aufzufinden, da die beiden Endpunkte derselben sehr nahe aneinander liegen und man aus der Entfernung dieses Stückes von der Achse und von der Horizontslinie die Grösse der Krümmung leicht beurteilen kann.

Wollte man jedoch zur genauen Verzeichnung der Kurve einen weiteren Anhaltspunkt haben, so könnte man die Tangenten in den beiden Endpunkten auffinden, indem man berücksichtigt, dass die zu suchende Tangente parallel zu jener ist, welche man an den Basiskreis $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ in einem vertikal unter obigem Berührungspunkte gelegenen Punkte zieht. Man würde sich demnach die Tangenten in den einzelnen Teilpunkten des Basiskreises ziehen und die fraglichen Tangenten entsprechend gegen die Fluchtpunkte der ersteren führen.

Ist das Stufenprofil in der Stiegenhausmauer gefunden, so hat man nur der Reihe nach je zwei in einer Horizontalebene liegende Punkte mit einem Teilpunkte der Stiegenachse zu verbinden und bis zum Schnitte mit der Spindel zu verlängern. Das sich hierdurch auf der Spindel ergebende Profil wäre in gleicher Weise wie jenes auf der Stiegenhausmauer zu verzeichnen. Die Konstruktion desselben kann jedoch im vorliegenden Falle, da es im Bilde nicht sichtbar erscheint, umgangen werden, würde aber bei einer freitragenden Treppe durchgeführt werden müssen. In unserem Beispiele sind die horizontalen Stufenkanten bloss bis zur vertikalen Kante $\mathfrak{a}'$ der Spindel sichtbar.

Auf der anderen Seite der Spindel sieht man unter die Stiege; es wird sodann bloss eine Schraubenlinie als Schnitt der unteren windschiefen Stiegenfläche mit der Stiegenhausmauer zu verzeichnen sein. Einzelne Punkte dieser Kurve sind leicht aufzufinden.

Die letzte Stufenhöhe kömmt in die Kante $\mathfrak{b}$ zu liegen. In dieser Höhe wurde eine Platte, auf Tragsteinen ruhend, angeord-

net, welche den Gang bilden soll und mit einem Gitter versehen ist. Die Fortsetzung der Stiege in das nächste Stockwerk wird ganz auf dieselbe Weise wie der soeben konstruierte Teil erhalten.

§ 467.

Gesimse.

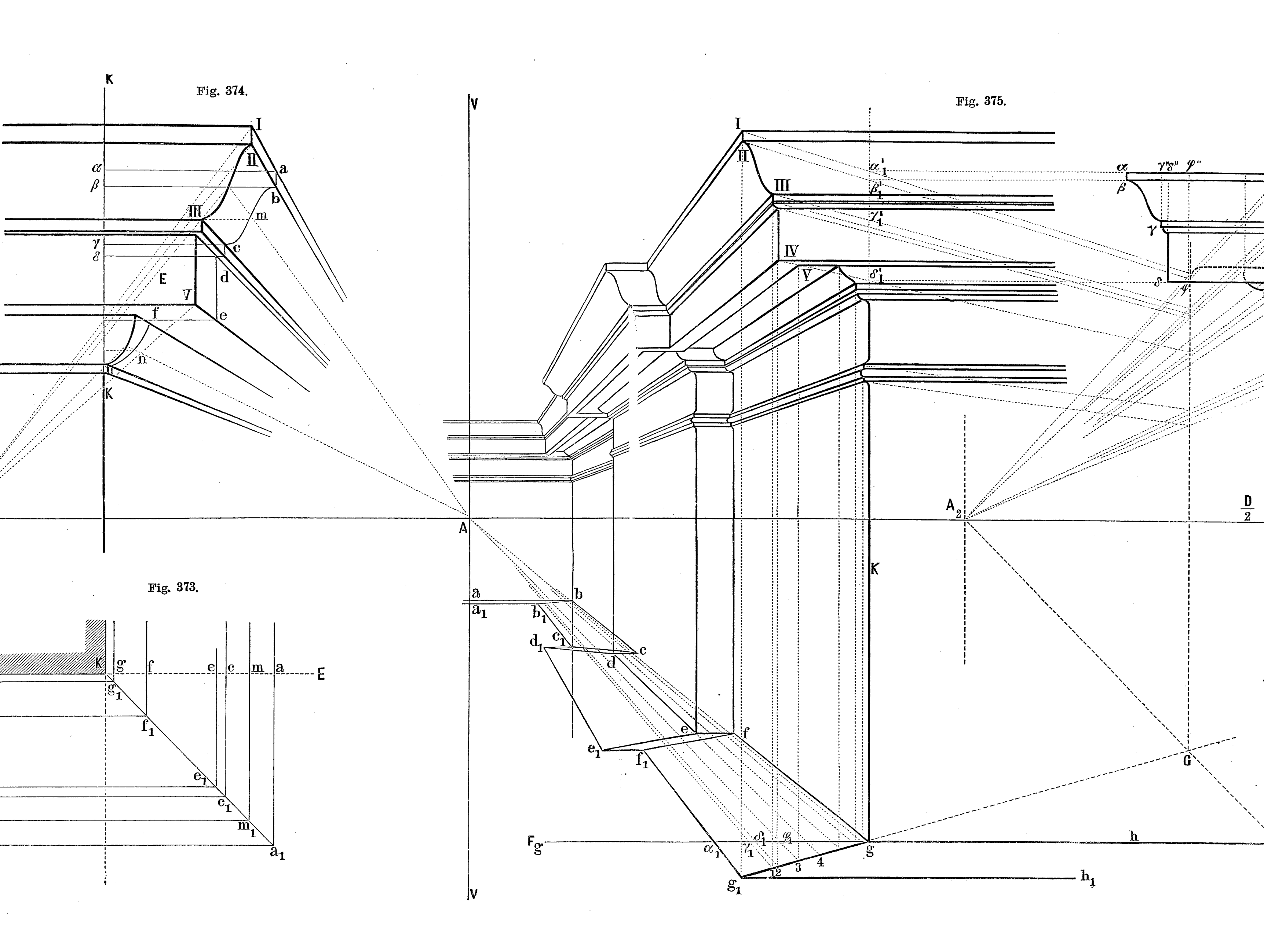
Bei der perspektivischen Darstellung von Gesimsen handelt es sich eigentlich bloss um die Darstellung jener Ecke, Gesimsgrat genannt, welche sich als Schnitt der an den Hauptmauern umlaufenden gleichgestalteten Gesimse ergibt.

Zumeist haben die beiden aneinander stossenden Mauern eine zu einander senkrechte Stellung, daher wir auch diesen Fall hier näher behandeln wollen. Wo dies nicht vorkömmt, unterliegen die Konstruktionen auch keinen Schwierigkeiten, indem es sich in allen Fällen eigentlich bloss um den Schnitt zweier horizontalen Prismen von bekannter gleicher Leitlinie handelt.

Es sei also in Fig. 373 die horizontale Projektion (Grundriss) eines Gesimses, dessen Profil **abc . . . k** in Fig. 374 angegeben ist. In **K** sei eine Ecke, von welcher aus die eine Mauerfront senkrecht, die andere parallel zur Bildfläche läuft. Das eben angegebene Profil sei der Durchschnitt einer durch **K** parallel zur Bildfläche gelegten Ebene **E** mit dem Gesimse. Die Konstruktionen können wir so durchführen, als wenn jenes Profil in der Bildfläche läge, **E** also die Bildebene selbst wäre.

Aus der Betrachtung des Grundrisses geht hervor, dass sich die fraglichen Eckpunkte a_1, c_1, e_1 . . . des Schnittes beider Gesimsfronten ergeben, wenn man von den Endpunkten **a**, **c**, **e** . . . des Profils **E** die Senkrechten aa_1, cc_1 . . . auf die Bildebene fällt und darauf Stücke abschneidet, welche der Ausladung der betreffenden Gesimspunkte, d. h. dem Abstande derselben von der Mauer, gleich sind, da offenbar $aa_1 = ak$, $cc_1 = ck$ . . . ist.

Hierdurch ist auch die Konstruktion der Perspektive eines solchen Gesimses bereits gegeben. Ist somit **abc . . . k** (Fig. 374) das in der Bildfläche angenommene Profil **E**, so hat man die einzelnen Eckpunkte desselben mit dem Haupt- oder Augpunkte **A** zu verbinden und auf diesen Geraden (nach vorne zu) perspektivisch Längenstücke abzuschneiden, welche den Entfernungen der betreffenden Punkte von der Kante **KK** gleich sind. Es sind also $aI = a\alpha$, $bII = b\beta$ . . . zu machen.


Fig. 374.
Fig. 375.
Fig. 373.
K
V
A
A2
D
2
G
F g
g
g1
h
h1
E
K g f e c m a E

Die krummlinigen Gesimsglieder werden in gleicher Weise behandelt, indem man ihren Durchschnitt punktweise bestimmt, wie dies auch in der Fig. 374 bei den Punkten **m** und **n** durchgeführt wurde. Hierbei wäre noch zu erwähnen, dass diesfalls durchgehends mit ein Drittel Distanz gearbeitet wurde, daher die Abstände $a\alpha$, $b\beta$ . . . in drei gleiche Teile geteilt erscheinen.

Mit Benützung des perspektivischen Grundrisses und einer Höhenebene lässt sich dieselbe Aufgabe auch auf folgende Art lösen:

Es sei wieder eine parallele und eine senkrecht zur Bildfläche stehende Mauerfront gegeben, welch letztere mit einem Risalit versehen ist. Wir werden daher an dieser Seite mehrere Gesimsgrate darzustellen, also auch mehrere dem vorigen Beispiele gleiche Konstruktionen durchzuführen haben. In einem solchen zusammengesetzten Falle dürfte wohl die Anwendung der nachfolgenden Methode zweckmässig sein und zwar insbesondere dann, wenn beide Mauerflächen gegen die Bildebene geneigt sind.

Man verzeichne zunächst den perspektivischen Grundriss **abcdefg** [Fig. 375] der Hauptmauer und jenen $a_1 b_1$ . . . $g_1 h_1$ der äussersten Gesimskante. Dies kann in einer beliebigen oder in einer samt dem Auge (Projektionscentrum) nach abwärts verschobenen Horizontalebene geschehen. Im vorliegenden Falle wurde der Augpunkt **A** für den Grundriss beibehalten; für die vertikale Höhenebene jedoch wurde der Aug- oder Hauptpunkt nach A_2 verlegt und F_b als deren Bildflächtrace angenommen.

Die Tracen bb_1, cc_1, dd_1 . . . gg_1 jener Vertikalebenen, in welchen die zu bestimmenden Gesimsgrate liegen, sind gegen die Bildebene unter einem Winkel von 45° geneigt, wie dies schon aus Fig. 373 ersichtlich ist. Die Bildebene denken wir uns durch die Mauerfläche **gh** gelegt, mithin werden wir an F_b das gegebene Gesimsprofil $\alpha\beta\gamma\delta$, dessen grösste Ausladung $\alpha\alpha' = g\alpha_1$ ist, in der wirklichen Gesimshöhe zu zeichnen haben.

Die einzelnen Gesimsglieder werden nun auf F_b und $\alpha\alpha'$ projiziert, wodurch man auf F_b die Höhen derselben und auf $\alpha\alpha'$ deren Entfernungen von der Hauptmauer in den Punkten α, γ'', δ'', φ'' . . . erhält.

Aus Fig. 373 erhellt, dass die Horizontaltrace der Diagonalprofilebene $a_1 K$ durch die horizontalen Projektionen der einzelnen Gesimskanten in gleichem Verhältnisse, wie die Gesimsausladung **ak** geteilt wird.

Dies werden wir in unserem Falle auf die einzelnen Horizontal- oder Grundrisstracen anzuwenden, und daher gg_1 [Fig. 375] perspektivisch in demselben Verhältnisse zu teilen haben, wie $\alpha\alpha'$ durch die einzelnen Vertikalabstände geteilt wurde. Zu diesem Zwecke übertrage man die besagte Gerade samt deren Teilpunkten von g nach α_1 und verbinde die letzteren mit dem Augpunkte A. Durch diese Geraden werden nicht nur gg_1, sondern auch alle ähnlich liegenden Profiltracen ff_1, cc_1, bb_1 in dem gegebenen Verhältnisse perspektivisch geteilt. Die zu suchenden Punkte des Gesimsgrates werden sonach in den in diesen Punkten 1, 2, 3 . . . errichteten Vertikalen liegen.

Um die einzelnen Punkte selbst zu erhalten, hat man nur auf zwei in derselben Diagonalebene liegenden Vertikallinien die in der Trace F_b erhaltenen Teilpunkte $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ . . . entsprechend zu übertragen und je zwei gleich hoch liegende Punkte beider Vertikalen miteinander zu verbinden. Diese Geraden geben im Schnitte mit den zugehörigen Perpendikeln auf HH die zu suchenden Punkte des Grates.

Für das Profil gg_1 wurde die Mauerkante g, auf welche, weil sie in der Bildebene liegt, die Teilpunkte horizontal nach α'_1, β'_1, γ'_1 . . . zu übertragen sind, und jene Vertikallinie G gewählt, welche sich als Schnitt der Diagonalebene gg_1 mit der Höhenebene F_b ergibt, und durch die Teilungslinien $A_2\alpha'$, $A_2\beta'$ . . . entsprechend geteilt wird. Die in den beiden Geraden G und g_1 erhaltenen Punkte geben, entsprechend miteinander verbunden, eine Reihe von horizontalen Geraden, welche die betreffenden Vertikalen in den zu suchenden Punkten I, II, . . . des Grates schneiden.

Zur Bestimmung der Diagonalprofile bb_1, cc_1 und ff_1 kann man das gleiche Verfahren anwenden. Es wird jedoch eine weitere Höhenbestimmung nicht notwendig sein, da die bereits gefundenen Gesimskanten, welche durch die einzelnen Punkte des Grates gegen den Augpunkt gezogen wurden, im Schnitte mit den in den Teilpunkten der betreffenden horizontalen Tracen errichteten Senkrechten, die zu bestimmenden Eckpunkte der obbezeichneten Grate geben.

Für die noch übrigen Grate, deren horizontale Projektionen die Geraden dd_1 und ee_1 sind, gilt das gleiche Verfahren. Es wird nämlich vorerst die Einteilung der Horizontaltracen dd_1 und ee_1 auf dieselbe Weise wie früher vollzogen. Zur Bestimmung der einzelnen Punkte ist jedoch keine weitere Konstruktion erforderlich, da sich dieselben im Schnitte der in den Teilpunkten der Tracen

dd$_1$, **cc**$_1$ errichteten Vertikallinien mit den bezüglichen, durch die Eckpunkte der nächstliegenden Grate geführten Gesimskanten sofort ergeben.

Eine Kontrolle für die Richtigkeit oder Genauigkeit der Arbeit kann jedoch eine unabhängige Höhenbestimmung für das eine oder das andere Diagonalprofil wünschenswert erscheinen lassen.

Wie schon früher bemerkt, ist die eben behandelte Methode insbesondere dann mit Vorteil anzuwenden, wenn beide Mauerflächen einen beliebigen Winkel miteinander bilden, oder, wenn sie wohl senkrecht aufeinander stehen, jedoch gegen die Bildfläche geneigt sind. In jedem Falle wird die Konstruktion in derselben Weise durchzuführen sein, wie in der behandelten Aufgabe gezeigt wurde, nur ist zu berücksichtigen, ob sich die Fluchtpunkte der horizontalen Projektionen der Gesimsgrate noch auf der Zeichnungsfläche ergeben, weil dieselben sodann mit Vorteil benützt werden könnten.

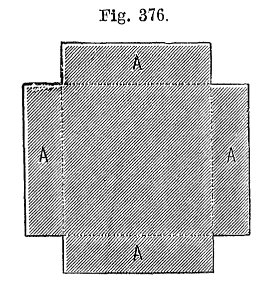
§ 468.

Gewölbe.

Betreffs der perspektivischen Darstellung von Gewölben ist infolge der bereits gegebenen Erläuterungen über die Darstellung und die gegenseitigen Beziehungen krummer Flächen nicht viel Neues mehr hinzuzufügen.

Für die Darstellung des Tonnengewölbes haben wir eine Cylinderfläche, für ein Kreuz- und Kappengewölbe zwei Cylinder nebst ihren Durchschnittslinien, für ein böhmisches Platzelgewölbe die vier Gurten, welche die Pfeiler verbinden u. s. w. zu verzeichnen.

Fig. 376.



Ist an einem Gewölbe der Fugenschnitt anzugeben, so geschieht dies in der Perspektive ebenso wie in der orthogonalen Projektion. Die Fugen, welche fast durchgehends gerade Linien oder Kreisbogenstücke sind, werden durch die Konstruktion besagter Linien, die durch vorher bestimmte Punkte gehen, erhalten.

Behufs Darstellung der Pfeiler ist zu bemerken, dass man denselben zumeist einen quadratischen, mit rechteckigen Ansätzen, Vorsprüngen oder Verstärkungen **A** [Fig. 376] versehenen Querschnitt zu geben pflegt, welche die Anläufe der hervortretenden,

das Gewölbe begrenzenden Gurten enthalten. Die sogenannten Schilde entstehen im Durchschnitte zweier Gewölbe. Über die Konstruktion der Durchdringungsfigur ist bereits in dem betreffenden Kapitel das Erforderliche besprochen worden.

Als Beispiele über diesen Gegenstand wollen wir folgende Probleme lösen.

§ 469.

192. Aufgabe: **Es ist ein mit einem halbkreisförmigen Tonnengewölbe überdeckter, durch Gurten geteilter Gang darzustellen, wenn die Bildfläche senkrecht auf die Gangrichtung angenommen wird.**

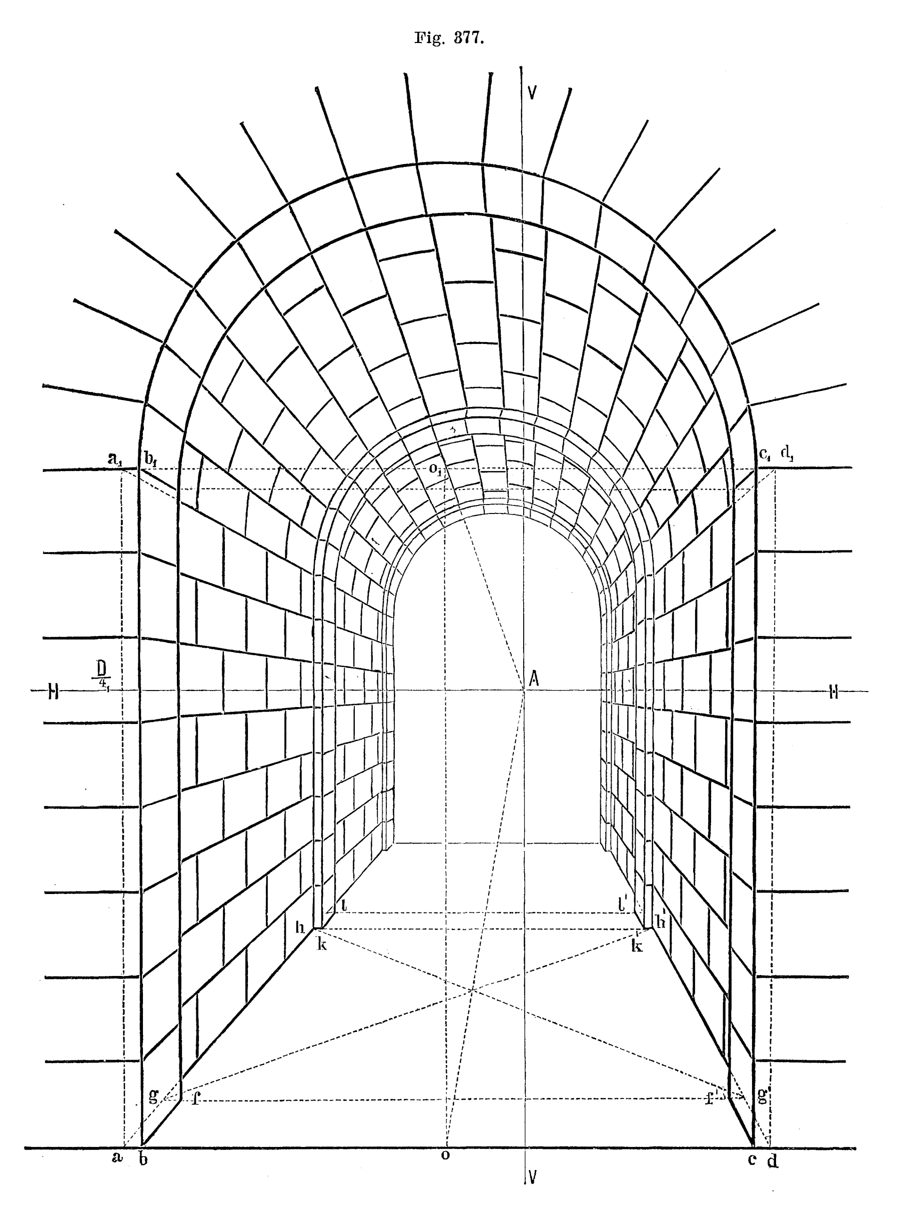
Man ziehe eine horizontale Gerade **ad** [Fig. 377], von welcher aus der Gang beginnen soll, trage darauf die Gangbreite **ad** sowohl als auch die Strecken **ab** = **cd** gleich der Grösse des Vorsprungs der Gurten von **a** und **d** nach innen auf und verbinde die so erhaltenen Punkte **a**, **b**, **c** und **d** mit dem Augpunkte **A**.

Auf einer oder der anderen dieser Geraden nehme man die Teilung derart vor, dass vorerst eine Gurtenbreite, dann ein Teil der Ganglänge, und in gleicher Ordnung weiter, perspektivisch aufgetragen wird, und verzeichne sodann die inneren Umfangslinien **abfghkl** . . . der Seitenmauern.

Errichtet man nun in den einzelnen Eckpunkten die vertikalen Mauerkanten aa_1, bb_1 . . . und zieht in der gegebenen Höhe des Anlaufes die Horizontale $a_1 d_1$, führt man ferner aus den Punkten a_1, b_1, c_1, d_1 Gerade gegen den Augpunkt, welche den Geraden **aA**, **bA** . . . der Bodenfläche (Grundebene) entsprechen, so werden diese die Seitenmauern nach obenhin begrenzen, wobei selbstverständlich die Geraden a_1A, d_1A sowie jene **aA** und **dA** bloss in den Seitenmauerflächen, hingegen b_1A, c_1A nur in den inneren Flächen der rechteckigen Vorsprünge zu ziehen sind und die Verbindung der einzelnen Linienstücke durch die zur Bildfläche parallelen Geraden stattfindet.

Weiter hat man b_1c_1 in **o** zu halbieren und **o** mit **A** zu verbinden, um jene Gerade zu erhalten, welche die Mittelpunkte für sämtliche Kreisbögen des Gewölbes enthält, welch letztere, als zur Bildfläche parallel, sich auch im Bilde als Kreise darstellen. Die Durchmesser dieser Halbkreise ergeben sich sodann durch Verbindung je zweier gegenüber liegender Eckpunkte der Anlaufslinien.

Fig. 377.



Den Fugenschnitt betreffend nehme man die Quadrathöhe als aliquoten Teil von $\mathbf{aa_1}$ an, mache die Einteilung auf den in der Vertikalebene $\mathbf{a\,d\,d_1\,a_1}$ gelegenen Gewölbequerschnitt in der-

selben Weise, wie in der orthogonalen Projektion, trage die Quaderlänge auf die Gerade **Aa** zwischen je zwei Gurten derart auf, dass man gleichzeitig die Halbierungspunkte der einzelnen Längen bestimmt und ziehe die Längenfugen des Gewölbes sowohl als der Seitenmauern durch die einzelnen beziehungsweise auf $\mathbf{aa_1}$, $\mathbf{bb_1}$ ... und auf den entsprechenden Kreisbögen erhaltenen Teilpunkte gegen den Augpunkt **A**, die Querfugen jedoch in den Seitenmauern als vertikale Gerade, in der Gewölbsfläche dagegen als Kreisbogenstücke, deren Mittelpunkte auf gleiche Weise wie jene der Gurtenbögen sich ergeben.

Wäre das Gewölbe nicht senkrecht zur Bildebene gelegen, so würde die Konstruktion nur insoweit eine Abänderung erfahren, als sich die Bilder sämtlicher Halbkreise als halbe Ellipsen, die Kreisbogenstücke aber Ellipsenstücke darstellen würden.

§ 470.

193. Aufgabe: **Es sind zwei hintereinander gelegene gleiche Kreuzgewölbe, welche auf Pfeilern aufruhen, perspektivisch darzustellen.**

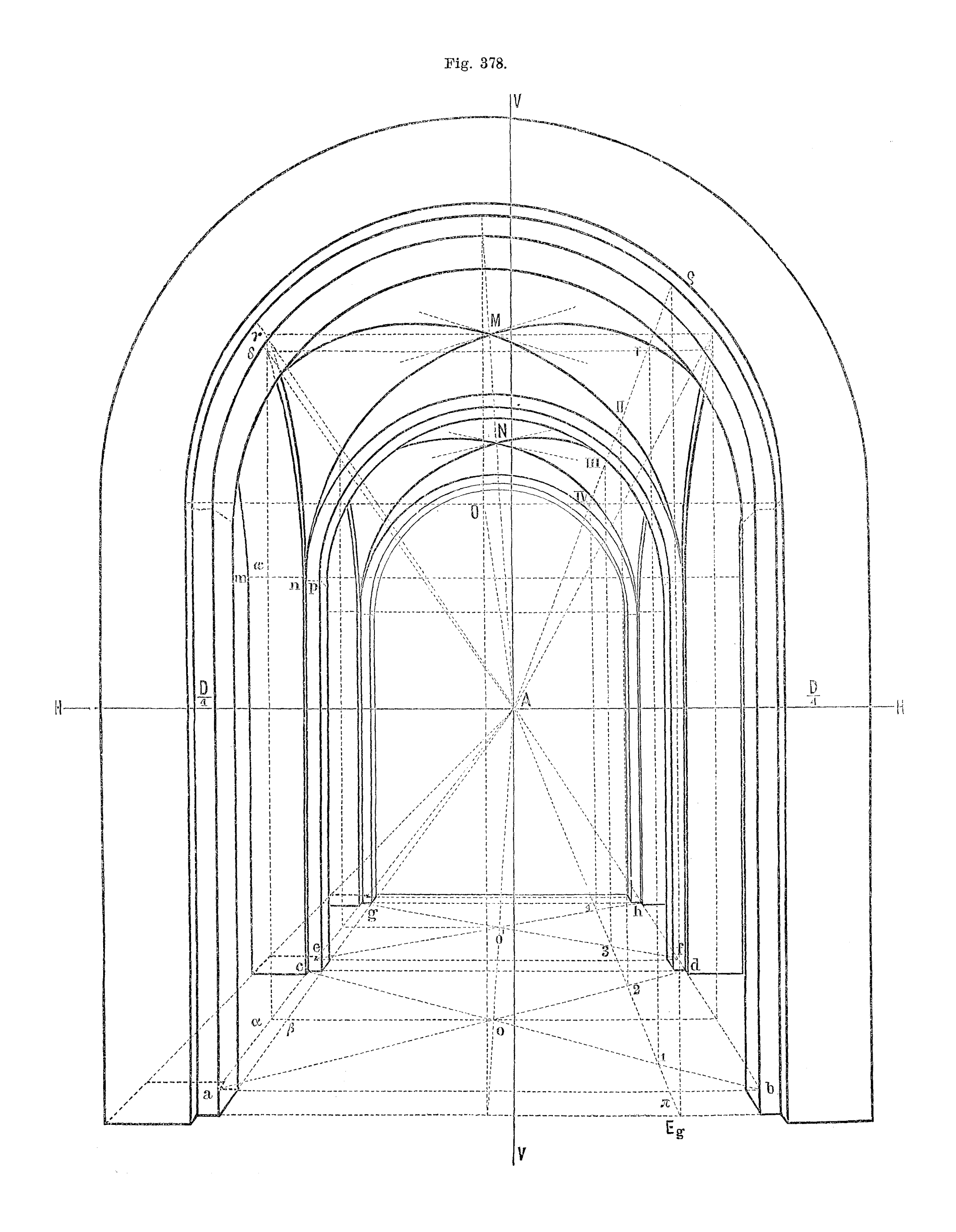
Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass jedes dieser beiden Gewölbe über einen quadratischen Raum gespannt sei, und dass die Tonnen der Kreuzgewölbe halbkreisförmig seien. Ferner sollen die Pfeiler so gestellt werden, dass sie paarweise von der Bildfläche gleich weit abstehen.

Vorerst verzeichne man den Grundriss in der horizontalen Ebene des Terrains (Grundebene), d. s. die Grundrisse der sechs Pfeiler [Fig. 378] und die beiden Diagonalen in den Quadraten **abcd** und **efgh**, welche die Perspektiven der horizontalen Projektionen der Durchschnittslinien beider Tonnen geben. Ferner errichte man in den einzelnen Eckpunkten des Grundrisses die vertikalen Pfeilerkanten, von welchen jedoch bloss einige und zwar jene, die nach vorne liegen, als sichtbar darzustellen sein werden und schneide auf denselben die Pfeilerhöhe (wie im vorigen Beispiele) ab.

Auf diese Weise wird man die Fusspunkte der Bögen erhalten, welche den Gurten angehören. Die Mittelpunkte der zur Bildfläche parallelen Halbkreise ergeben sich, wie in der vorhergehenden Aufgabe, in der Geraden **AO**.

Um die Bilder jener Halbkreise, welche den Gurten entsprechen, die je zwei hintereinander liegende Pfeiler verbinden, zu verzeich-

Fig. 378.



nen, führe man aus dem Schnittpunkte **o** der beiden anfangs gezogenen Diagonalen die Horizontale α**o** als Grundflächtrace jener Vertikalebene, in welcher die Mittelpunkte der in Rede stehenden Halbkreise liegen. Die Strecken α**o** und β**o** geben die Längen an, in welchen die zur Bildfläche parallelen Halbmesser der durch **p**, beziehungsweise durch **m** und **n** gehenden Halbkreise im Bilde erscheinen.

Zieht man also durch α die Vertikale $\alpha\omega$ und trägt vom Mittelpunkte ω aus die Stücke $\omega\delta = \mathbf{o}\beta$, $\omega\gamma = \mathbf{o}\alpha$ auf, so sind die den Punkten **n** und **p** zugehörigen Halbkreise über diesen Halbmessern in der Vertikalebene **a**α**A** zu construieren.

Ähnlich verhält es sich mit dem durch **m** gehenden Kreisbogen. Von den so gefundenen Bildern sind bloss jene Stücke sichtbar, welche bis zu den vorher bestimmten Gurten reichen.

In gleicher Weise werden die sämtlichen, ähnlich gelegenen Gurten bestimmt, nur wäre diesbezüglich allenfalls noch hervorzuheben, dass man, wie übrigens selbstverständlich, die Punkte der letztgefundenen Bögen unmittelbar für die weitere Konstruktion benützen kann, indem die gleichartigen Punkte ähnlichliegender Bögen in einer Horizontalebene enthalten sind.

Würde dem bisher Durchgeführten nichts mehr angefügt werden, so würde die gelieferte Zeichnung das Bild zweier hintereinander liegender, böhmischer Platzelgewölbe vorstellen; es wären sodann die den Geraden **ab**, **bc**, **cd** und **ac** entsprechenden Halbkreise nichts anderes, als die Schnitte der durch die den Punkten **a**, **b**, **c** und **d** entsprechenden Höhenpunkte gelegten Halbkugel mit den vier inneren Seitenflächen oder Wandebenen. Für das Kreuzgewölbe sind jedoch noch die Gewölbsgrate zu bestimmen, deren Verzeichnung keinerlei Schwierigkeiten bieten kann. Trotzdem wollen wir die Konstruktion derselben in einer folgenden Aufgabe näher erörtern.

Es wird hierzu grösstenteils der Grundriss benützt, und zwar werden zur Bestimmung einzelner Punkte dieser Kurven Vertikalebenen $\mathbf{E}_g$ (Grundflächtrace), welche eine Tonne nach geraden Erzeugenden schneiden, hier also am zweckmässigsten senkrecht zur Bildfläche sind, angewendet. Die Trace $\mathbf{E}_g$ schneidet die vorher genannten Diagonalen **ad**, **cb**, **gf**, **eh** . . . in den Punkten 1, 2, 3, 4, über welchen sich die betreffenden Punkte der Schnittkurve vorfinden. Der zur Bildfläche senkrechte Cylinder wird in der Erzeugenden ρ**A** (ρ vertikal über π) geschnitten, und diese letztere wird im

Schnitte mit den vorher gezogenen Vertikalen die zu suchenden Punkte **I**, **II**, **III**, **IV** liefern. Symmetrisch zu diesen können weitere vier Punkte sehr leicht gefunden werden.

Insbesondere werden die Punkte **M** und **N**, als Durchschnitte der Gewölbsgrate, gleich im vorhinein zu bestimmen sein. Dieselben liegen auf den in **o** und **o'** errichteten Vertikalen in einer Höhe α**o** über der Anlaufslinie. Die Tangenten in den besagten Punkten der Grate sind horizontal, ergeben sich somit als die betreffenden Diagonalen des in der Ebene der Scheitel **M** und **N** parallel zu den Seitenwänden des Raumes verzeichneten Quadrates; sind also, mit anderen Worten, parallel zu den Diagonalen der Grundrissquadrate. Im vorliegenden Falle sind diese daher unter einem Winkel von 45° gegen die Bildebene geneigt.

Auf dieselbe Weise müsste vorgegangen werden, wenn das Kreuzgewölbe in schiefer Stellung gegen die Bildebene zu verzeichnen wäre, nur würden jene Kreise, die hier im Bilde wieder als Kreise erscheinen, sich dort als Ellipsen darstellen.

§ 470.

194. Aufgabe: **Es sind die Grate eines Kreuzgewölbes zu verzeichnen.**

Wie bereits erwähnt entsteht das Kreuzgewölbe durch den Schnitt zweier Tonnengewölbe von gleicher Pfeilhöhe. Wir wollen die Tonnen halbkreisförmig annehmen und das Gewölbe so verzeichnen, dass die eine Tonne parallel, die andere dagegen senkrecht zur Bildebene ist.

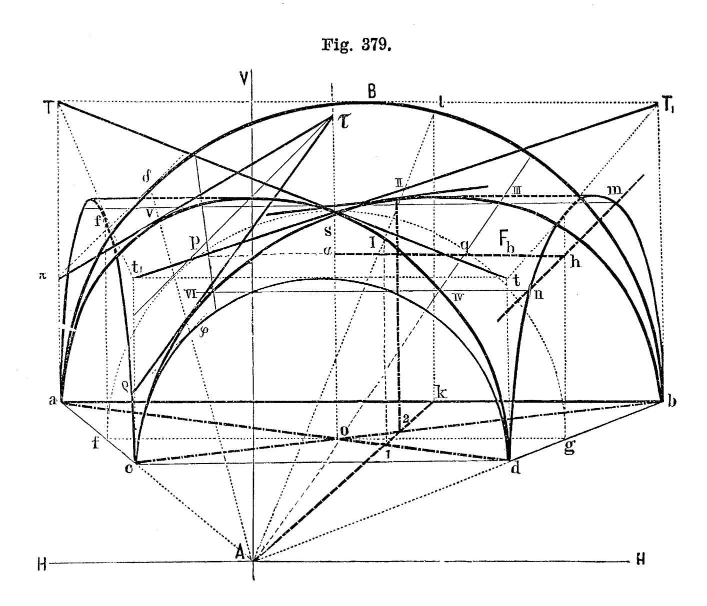
Ist also **abcd** [Fig. 379] das Bild des horizontalen Quadrates, welches von den Anlaufslinien der beiden Tonnengewölbe gebildet wird, so sind die beiden Diagonalen des Quadrates die Perspektiven der horizontalen Projektionen der Durchdringungskurven beider Tonnen, daher **o** die horizontale Projektion des Gewölbscheitels **s**. Legt man durch **o** eine zur Bildfläche parallele Ebene, so ist der über **fg** als Durchmesser verzeichnete Kreis die Perspektive des Schnittes dieser Ebene mit dem auf der Bildfläche senkrechten Cylinder, während der Schnitt derselben Ebene mit dem zweiten Cylinder eine diesen Kreis berührende horizontale Gerade ist. Die über **ab** und **cd** beschriebenen Kreise repräsentieren die Begrenzungen der ersterwähnten Cylinderfläche.

Um Punkte der Durchdringungskurve zu erhalten, kann man auf mehrfache Weise vorgehen.

a) Mit Benützung der horizontalen Projektionen der Grate.

Nimmt man nämlich irgend einen Punkt 1 der Projektion an und legt durch denselben eine zu den Erzeugenden des ersteren Cylinders parallele vertikale Ebene, so ist **A1** deren hori-

Fig. 379.



zontale Trace, welche noch überdies den Punkt 2 der zweiten Diagonale in sich enthält. Diese Trace schneidet die Gerade **ab** in **k**.

Die Vertikale **kI** ist daher die Trace der eben genannten Ebene auf der vorerwähnten zur Bildfläche parallelen Seitenebene **ab**. Dieselbe schneidet den in dieser Ebene liegenden Kreis im Punkte **I**. Die Gerade **AI** ist mithin der Schnitt der Hilfsebene mit der Cylinderfläche. Besagte Schnittgerade trifft die in 1 und 2 errichteten Vertikallinien in den Punkten **I** und **II** der fraglichen Schnittkurve.

Diese Lösungsweise hat den Nachteil, dass die in der Nähe des Haupt- oder Augpunktes **A** sich ergebenden Schnitte sehr schief ausfallen, daher die so gefundenen Punkte nicht mit der nötigen Genauigkeit erhalten werden.

b) Kann man horizontale Hilfsebenen anwenden, welche beide Cylinderflächen nach Geraden schneiden.

Vermittels dieser Ebenen wird man Punkte der Schnittkurve finden können, ohne erst die horizontale Projektion der Grate benützen zu müssen.

Ist F_b die Trace einer solchen Ebene auf der durch **fg** gelegten Vertikalebene, so wird der über **fg** beschriebene Kreis in den beiden Punkten **p** und **q**, die Cylinderfläche daher in den Erzeugenden **pA** und **qA** geschnitten.

Wird die zweite Cylinderfläche in **f** durch eine auf die Bildfläche senkrechte Vertikalebene **ff** begrenzt und der so erhaltene Halbkreis um **ff** in die Vertikalebene **fg** gedreht, so ist dieser daselbst aus dem Mittelpunkte **f** mit dem Radius **ff** zu beschreiben, wird daher dem Kreise über **fg** kongruent sein. Die zweite Cylinderfläche wird sonach in zwei horizontalen Erzeugenden geschnitten, welche sich im Abstande α**q** vor und hinter der durch **fg** gelegten Vertikalebene befinden.

Werdem demnach die Punkte **m** und **n** des Kreises **bmnd** so bestimmt, dass **hm** = **hn** perspektivisch gleich α**q** ist, so schneiden die durch **m** und **n** geführten Erzeugenden jene des ersten Cylinders in den Punkten **III**, **IV** u. s. w. der Durchdringungskurve.

c) Eine dritte Lösungsweise besteht darin, dass man zwei konjugierte Durchmesser der Perspektive der Schnittkurven, welche bekanntlich Ellipsen sind, sucht. Nachdem den Punkten **b**, **c**, **a** und **d** der Grate vertikale Tangenten entsprechen, so sind die Diagonalen **ad** und **bc** die einen Achsen dieser Ellipsen, während die anderen vertikal sind und durch die Halbierungspunkte der ersteren gehen. Wird also **bc** im Punkte 2 halbiert, daselbst die Vertikale 2 **II** errichtet und deren Schnitt **II** mit der Cylinderfläche bestimmt, so ist 2 **II** der gesuchte halbe Diameter. Auf gleiche Weise wird die zu **ad** konjugierte Halbachse der anderen Ellipse gefunden.

Die Konstruktion der Tangente an einen Punkt der Schnittkurve lässt sich hier ebenfalls auf mehrfache Weise durchführen und wird sich diese sehr einfach gestalten, wenn man berücksichtigt, dass die Tangente gleichfalls in der Ebene der Kurve liegen muss.

Sind beispielsweise in den Punkten **V** und **VI** der Erzeugenden δ**A** die Tangenten an beide Gewölbsgrate zu verzeichnen, so hat man durch δ**A** eine Tangierungsebene an den auf die Bildfläche senkrechten Cylinder zu legen und dieselbe mit den Ebenen der Kurven zum Schnitt zu bringen.

Diese Tangierungsebene schneidet die beiden durch **ab** und **cd** geführten Vertikalebenen in den Geraden $\delta\pi$ und $\varphi\rho$, welche zu einander parallel und Tangenten in den Punkten δ und φ der begrenzenden Kreise **a**δ**b** und **c**φ**d** sind.

Die Tracen der Diametralebenen **ad** und **bc** auf den vorgenannten Vertikalebenen sind offenbar die in **a**, **b**, **c** und **d** errichteten Vertikalen **aT**, $\mathbf{bT_1}$, $\mathbf{ct_1}$ und **dt**. Die Tangenten $\delta\pi$ und $\varphi\varrho$ schneiden sich mit je einer der vorgenannten, in derselben Diagonalebene liegenden Tracen in den Punkten π und ρ, welche mit **V** und **VI** verbunden die gesuchten Tangenten $\pi\tau$ und $\rho\tau$ geben.

Einfacher ergeben sich die Tangenten auf folgende Weise. Zieht man an den Kreis **fpg** in dem Schnittpunkte mit der Erzeugenden δ**A** eine Tangente, so stellt diese die Trace der Berührungsebene auf der durch **fg** gehenden Vertikalebene dar, welche mit den beiden Diagonalebenen **bc** und **ad** die Gerade **os** gemeinschaftlich hat. Der Punkt τ, in welchem diese Gerade von ersterer geschnitten wird, muss somit den verlangten Tangenten $\pi\tau$ und $\rho\tau$ angehören.

Wichtig ist ferner die Bestimmung der Tangenten in dem Kreuzungspunkte **s** der beiden Grate. Die Konstruktion derselben muss nach der erst angeführten Methode vorgenommen werden, da für diesen Punkt die zweite Methode zu keinem Resultate führt. Für die Erzeugende **As** ist die Trace der Berührungsebene im Punkte **B** horizontal und schneidet die durch **a** und **b** gehenden Vertikallinien in **T** und $\mathbf{T_1}$, daher diese Punkte bloss mit **s** zu verbinden sind, um die fraglichen Tangenten zu erhalten, welche horizontal und gegen die Bildfläche unter einem Winkel von 45° geneigt sind.

Die Konstruktion des Kreuzgewölbes in einer anderen, als der hier angenommenen Stellung, würde in gleicher Weise, nur mit den durch die Verschiedenheit der Lage sich ergebenden Abänderungen durchzuführen sein.

§ 472.

Säulen.

Von jeder Säule wird das Kapitäl, der Schaft und der Fuss zu verzeichnen sein.

Bezüglich des Säulenschaftes bleibt nur zu bemerken, dass dieser ein abgestutzter Kegel oder ein Cylinder ist und dass dort, wo derselbe Kannelierungen erhält, diese bestimmt werden, indem man den Basiskreis in die entsprechende Anzahl gleicher Teile teilt, durch dieselben die Erzeugenden der Kegel- oder Cylinderfläche zieht und diese Einschnitte auf der horizontalen Begrenzungsebene des Säulenfusses, zumeist nach dem Augenmasse oder

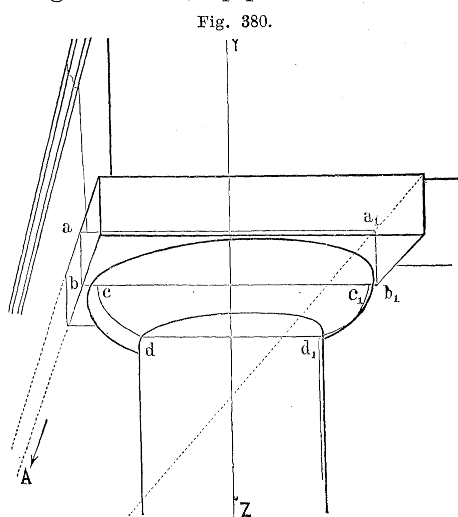
mit Hilfe eines an die Einschnitte tangentiell gelegten (mit dem Basiskreise konzentrischen) Kreises, verzeichnet.

Was die beiden anderen obgenannten Teile der Säule anbelangt, so dürfte es in den meisten Fällen angezeigt sein, die Bilder der sich ergebenden Kanten, Ecken, Einschnitte u. dergl. zu konstruieren, weil sich sodann die sichtbaren Umrisse der Umdrehungsflächen zumeist sogleich oder allenfalls vermittels eines oder des anderen in der Mitte angenommenen und verzeichneten Parallelkreises leicht ergeben.

Zur Bestimmung der einzelnen Punkte der zu konstruierenden Parallelkreise kann ein doppelter Weg eingeschlagen werden.

Nach der einen Methode kann man nämlich die Perspektiven dieser Kreise auf die gewöhnliche bereits besprochene Weise bestimmen, wie dies auch in Fig. 380, welche ein einfaches Kapitäl, bestehend aus einer quadratischen Platte $\mathbf{a a_1 b b_1}$ und einer einfachen Umdrehungsfläche $\mathbf{cd}$, $\mathbf{c_1 d_1}$ darstellt, durchgeführt wurde.

Fig. 380.



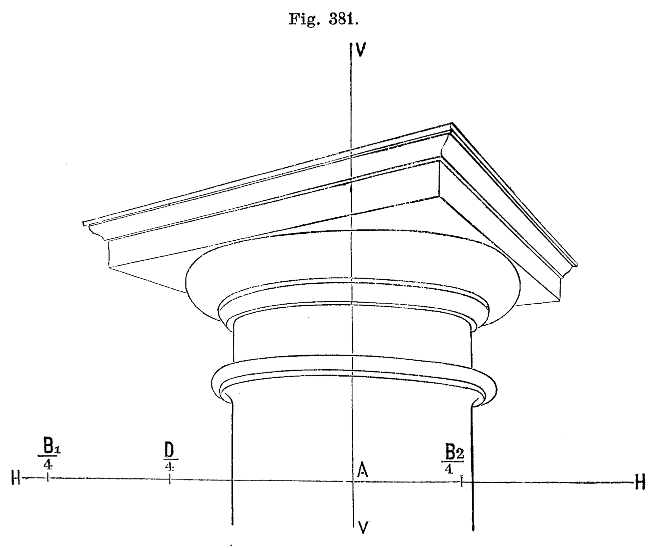
Behufs perspektivischer Darstellung desselben wird man vorerst die oberste Platte und hierauf die Perspektiven der beiden Kreise $\mathbf{cc_1}$, $\mathbf{dd_1}$ bestimmen. Ist aus dem Centrum (Auge) an den Hauptmeridian eine Tangente möglich, so berührt diese gleichfalls den sichtbaren Umriss. Um den sichtbaren Umriss mit der nötigen Sicherheit tangentiell an die bezeichneten Kreise ziehen zu können, wird man allenfalls noch einen zwischen $\mathbf{cc_1}$ und $\mathbf{dd_1}$ liegenden Parallelkreis einschalten.

Zum Zwecke der Bestimmung des sichtbaren Umrisses des Säulenschaftes kann noch irgend ein zweiter Querschnitt desselben perspektivisch dargestellt und die den Umriss bildenden Erzeugenden tangentiell an diesen und an den Kreis dd_1 geführt werden, oder man kann sich die Punkte des Umrisses in der Horizontalebene durch Umlegen des in dieser Ebene liegenden Kreisquerschnittes bestimmen, indem man aus dem umgelegten Auge (Projektionscentrum) die Tangenten an den Kreis führt und diese bis zum Schnitte mit der Horizontslinie verlängert.

In Fig. 381 ist ein zweites Kapitäl nach derselben Methode perspektivisch dargestellt.

Das zweite vorher angedeutete Verfahren besteht darin, dass man beliebig viele Meridiane der Umdrehungsfläche perspektivisch verzeichnet. Diesfalls wird es am zweckmässigsten sein,

Fig. 381.

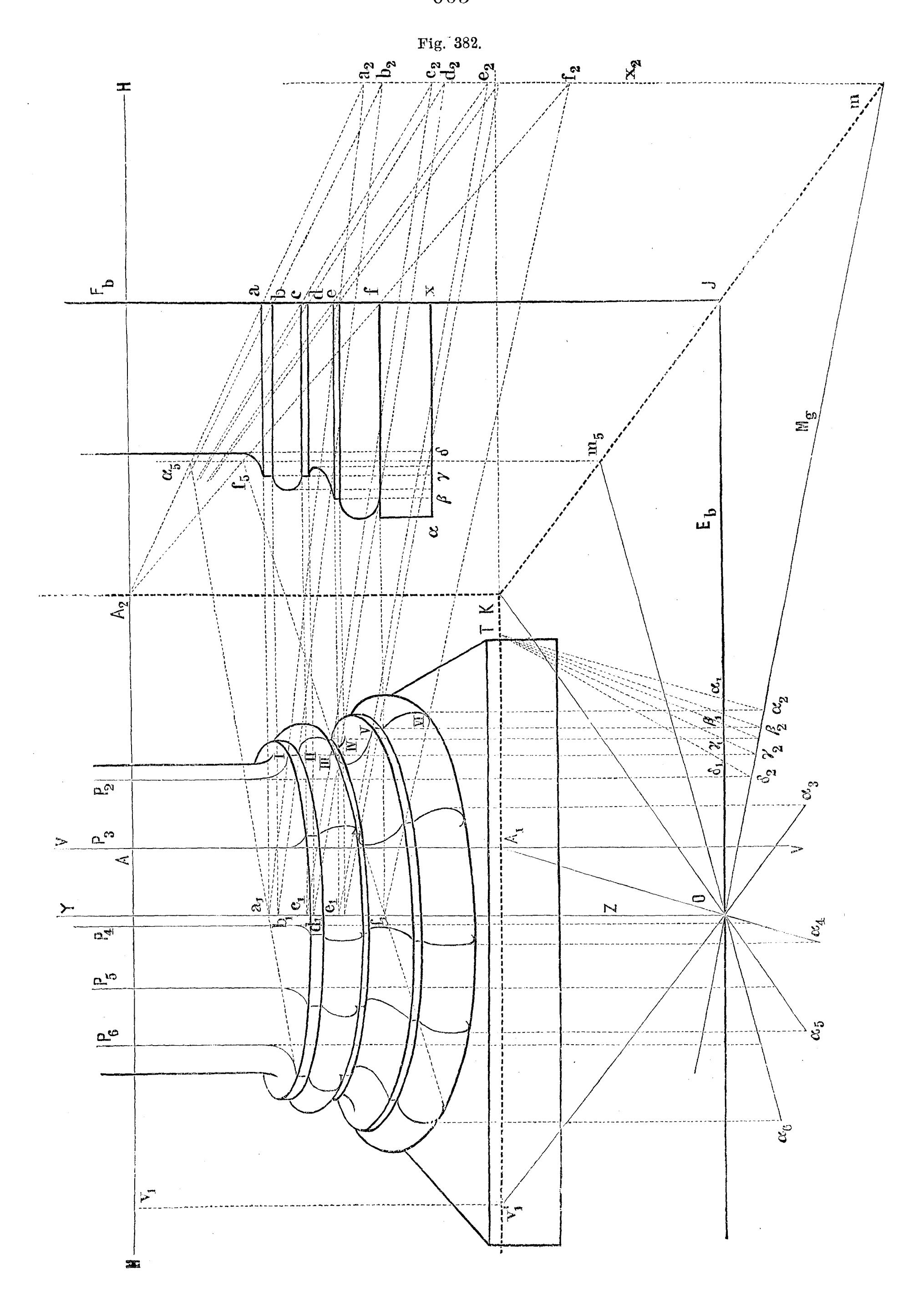


von einer besonderen Vertikalebene zur Höhenbestimmung Gebrauch zu machen und überdies einen perspektivischen Grundriss anzuwenden.

Auf diese Weise wurde in Fig. 382 der attisch-jonische Säulenfuss dargestellt. Für den Grundriss wurde E_b als Bildflächtrace angenommen und der Augpunkt A nach A_1 verschoben; ebenso sind F_b und A_2 die gleichnamigen Stücke für die Höhenebene, mithin ist JK die gemeinschaftliche Schnittlinie resp. die Trace dieser beiden Ebenen.

An F_b verzeichne man das Profil oder den Hauptmeridian,

Fig. 382.



H
F b
A 2
E b
J
T K
m
m 5
M g
Z
0
Y
V
A
P 2
P 3
P 4
P 5
P 6
V 1
a
b
c
d
e
f
x
a 2
b 2
c 2
d 2
e 2
f 2
x 2
α β γ δ

beziehe wie bei dem Gesimse [Fig. 375] die einzelnen Punkte desselben, welche man für die Konstruktion der Meridiane als notwendig erachtet, auf die vertikale Achse F_b der Säule und auf eine Horizontale αx so, dass sich auf diesen beiden Geraden beziehungsweise die Hilfspunkte a, b, c, d . . . x und α, β, γ, δ . . . x ergeben.

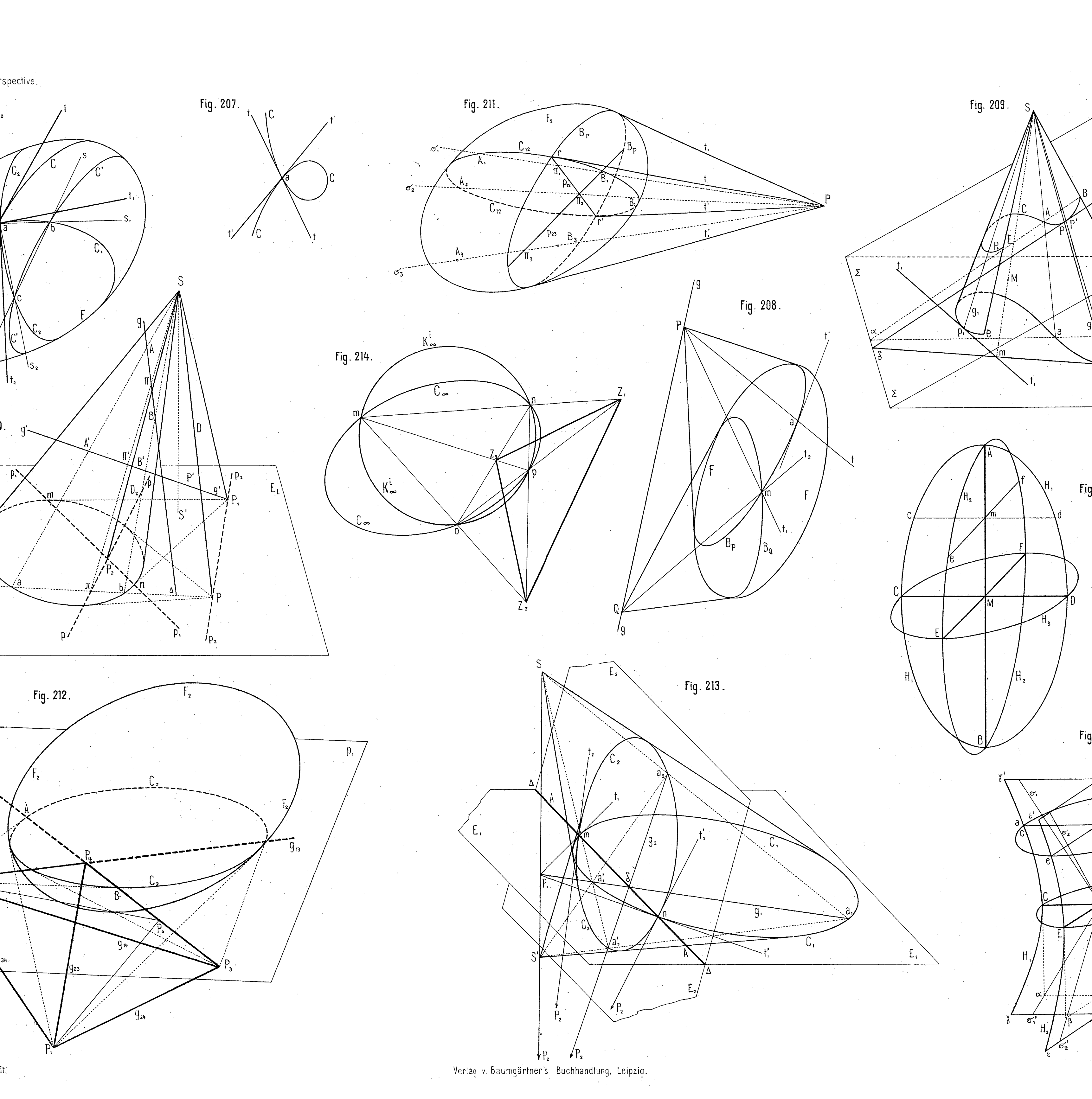
Nimmt man nun die Grundflächtrace M_g irgend einer Meridianebene an und schneidet auf derselben von O aus die Längen $x\delta$, $x\gamma$ . . . perspektivisch ab, wozu der Teilungspunkt T der Trace M_g oder ein beliebig gewählter Flucht- oder Verschwindungspunkt v benützt werden kann, so liegen die zu suchenden Punkte der Meridiankurve vertikal über den eben gefundenen Punkten der horizontalen Trace.

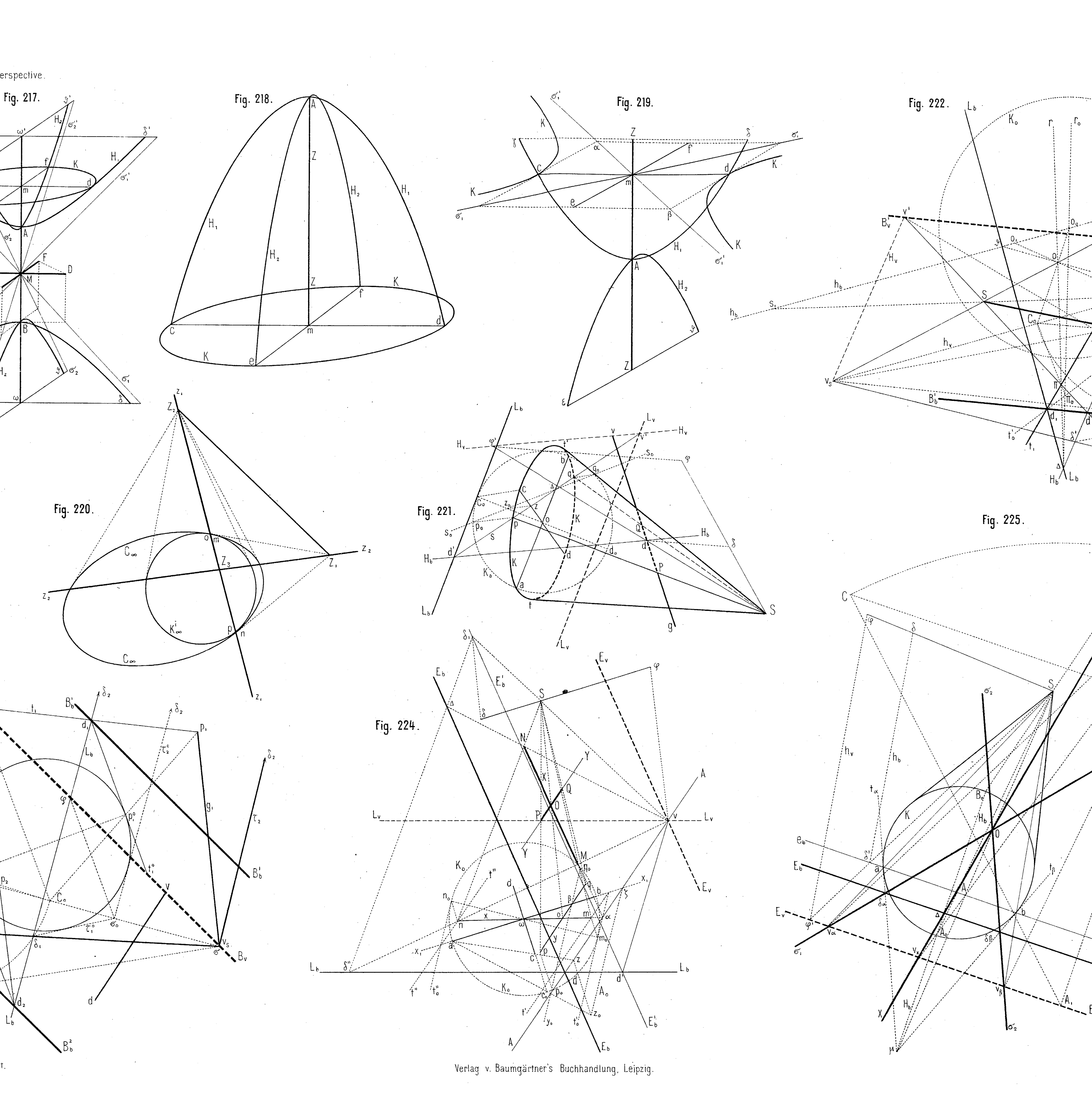
Ferner verbinde man die in F_b liegenden Teilpunkte mit A_2 und verlängere diese Geraden so weit, bis sie die im Schnitte m der Geraden JK und M_g errichtete Vertikale in den Punkten a_2, b_2, c_2 . . . treffen. Die Teilpunkte a, b, c . . . übertrage man auch horizontal auf die Umdrehungsachse nach a_1, b_1, c_1 . . . Hiermit sind zwei in der Meridianebene M liegende Geraden in gleichem Verhältnisse geteilt, weshalb die einzelnen Punkte dieser Geraden gehörig verbunden (a_1 mit a_2, b_1 mit b_2 . . .), die in α_2, β_2, γ_2 . . . errichteten Vertikalen in den Punkten I, II, III . . . des zu suchenden Meridians schneiden.

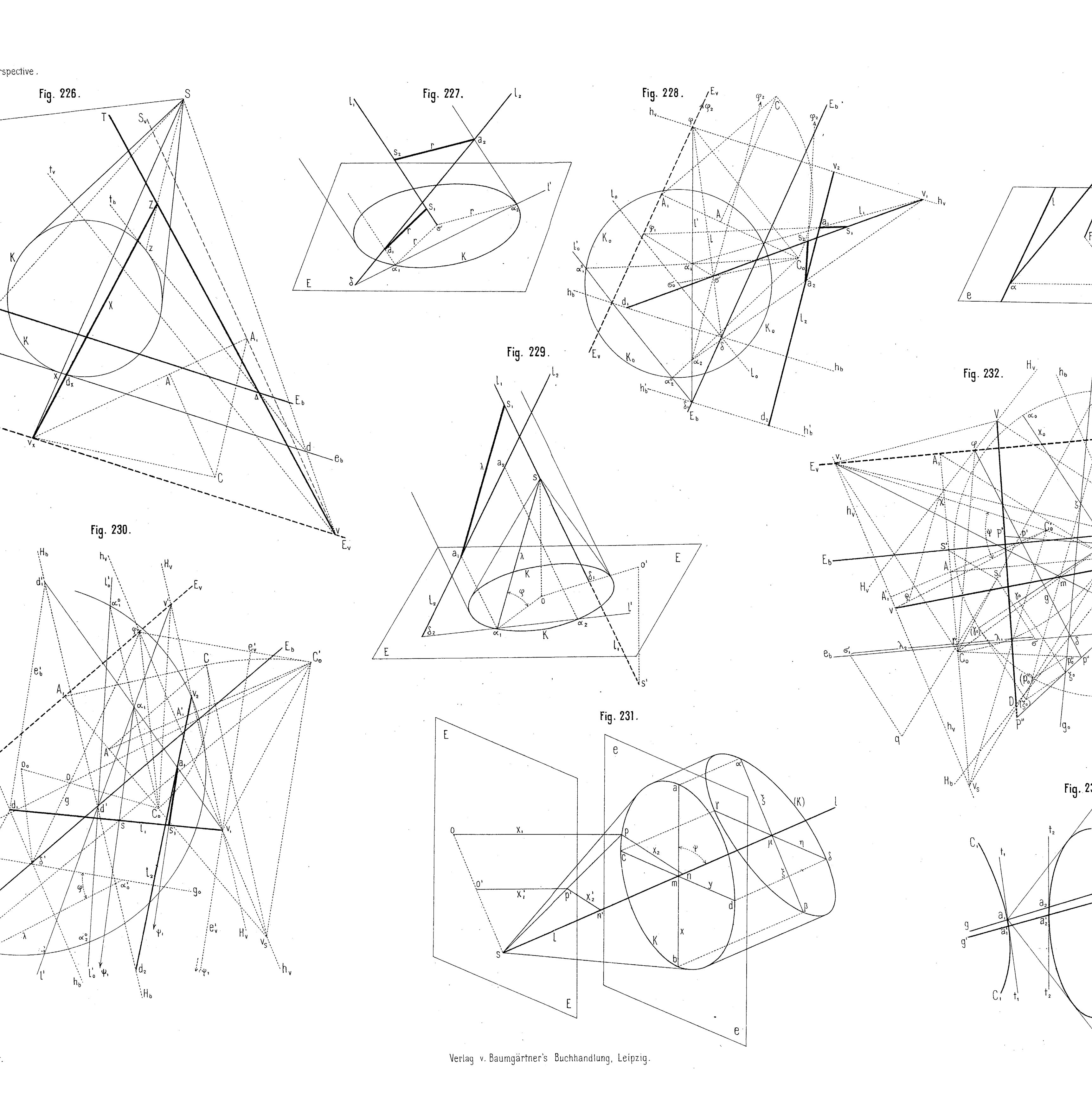
Nach gleichem Vorgange können beliebig viele Meridiane bestimmt werden, nur ist zu bemerken, dass dieselben hauptsächlich dort nahe aneinander zu verzeichnen sind, wo die Krümmung der Parallelkreise im Bilde am grössten erscheint, also in der Nähe des perspektivischen Umrisses. Der letztere ist sodann tangentiell an die Meridiankurven zu ziehen.

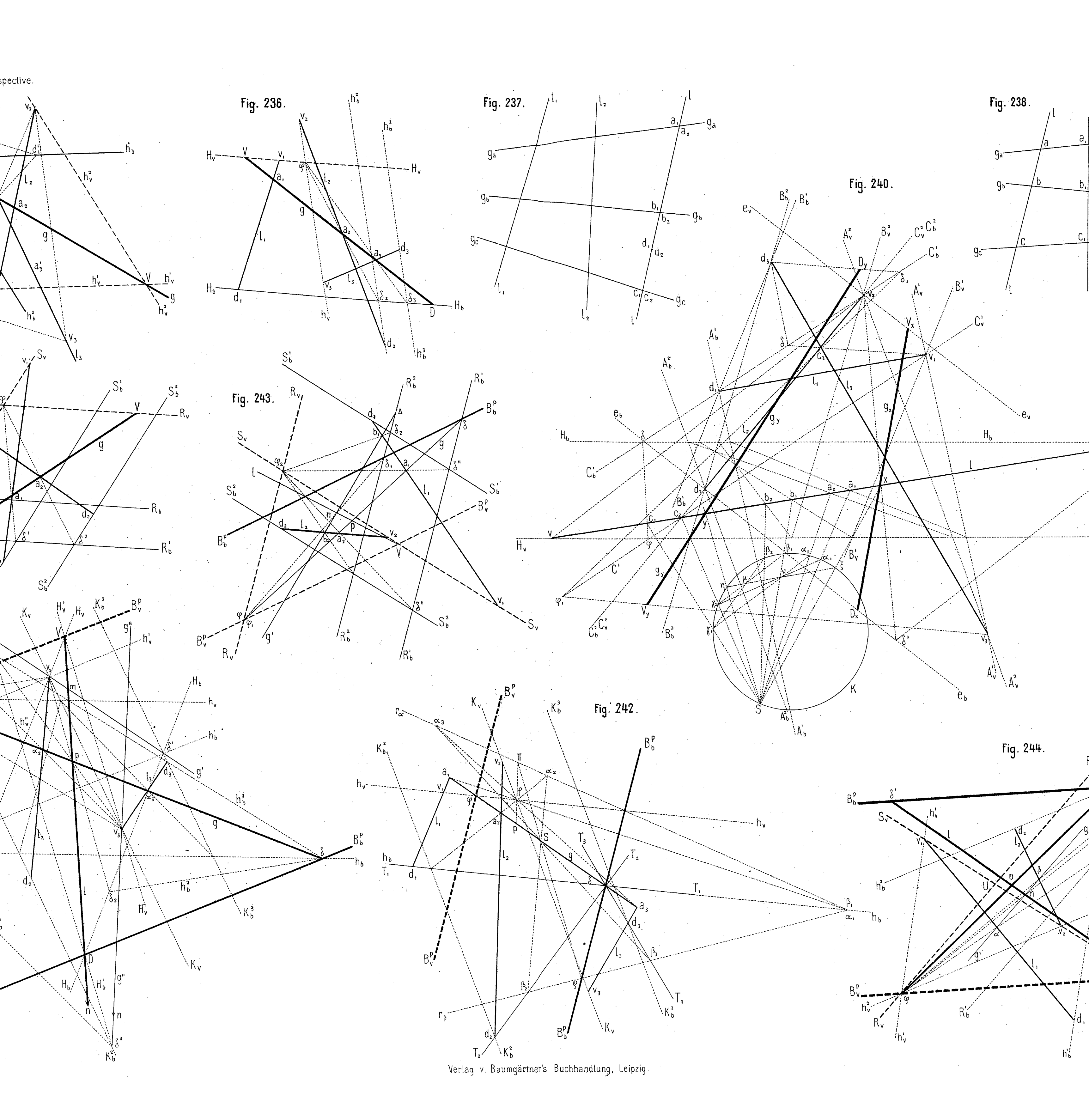
Nimmt man die Grundflächtrace $\alpha_3 O$ der Meridianebene derart an, dass sie die neue Horizontallinie $A_1 K$ noch innerhalb der Zeichnungsfläche trifft, so wird der Schnittpunkt v_1' vertikal in die Horizontslinie HH nach v_1 projiziert, als Fluchtpunkt der Teillinien zu benützen sein. Letzteren Punkt wird man sodann bloss mit den einzelnen Teilpunkten der Achse YZ zu verbinden haben, daher diesfalls die Höhenbestimmung auf einer zweiten Vertikallinie entfällt.

Diese Methode gibt Punkte von den einzelnen, beliebig angenommenen Parallelkreisen, welche im Bilde teils als Kanten wirklich zu ziehen, teils bloss für die Verzeichnung des Umrisses erforderlich sind.

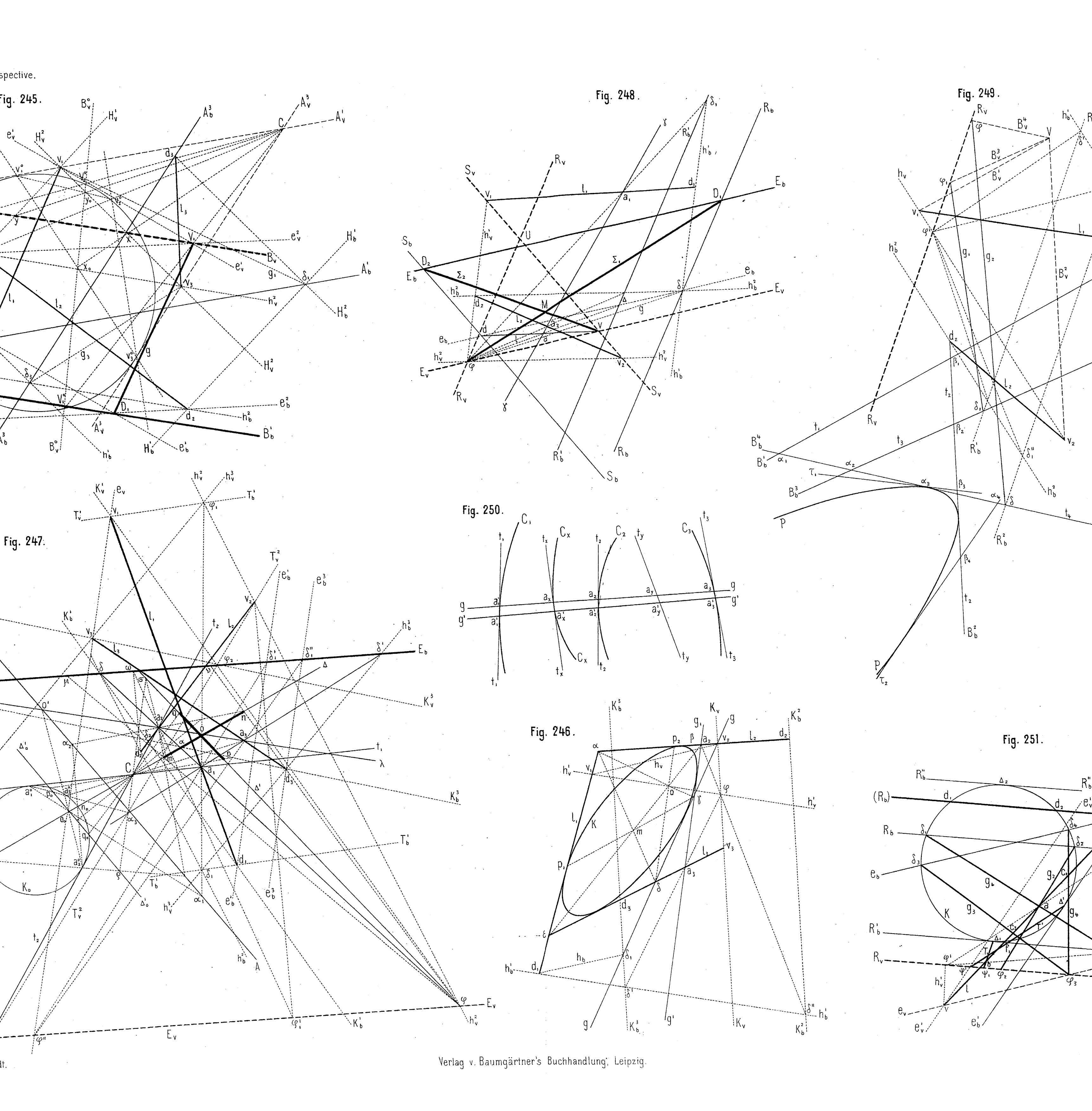

rspective.
Fig. 207.
Fig. 211.
Fig. 209.
Fig. 214.
Fig. 208.
Fig. 212.
Fig. 213.
Verlag v. Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.


erspective.
Fig. 217.
Fig. 218.
Fig. 219.
Fig. 222.
Fig. 220.
Fig. 221.
Fig. 225.
Fig. 224.
Verlag v. Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.

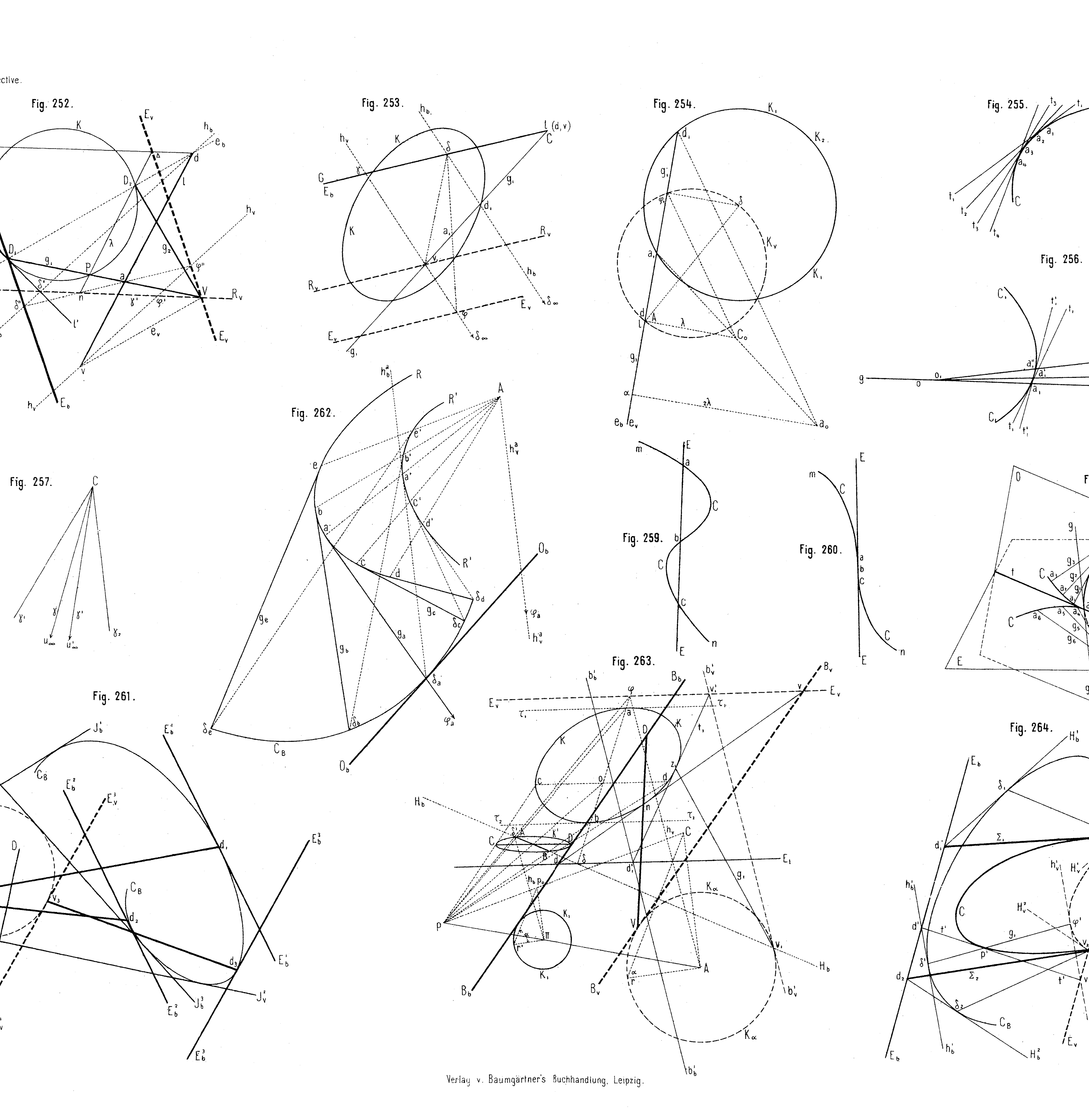

rspective.
Fig. 226.
Fig. 227.
Fig. 228.
Fig. 229.
Fig. 230.
Fig. 231.
Fig. 232.
Fig. 23
Verlag v. Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.



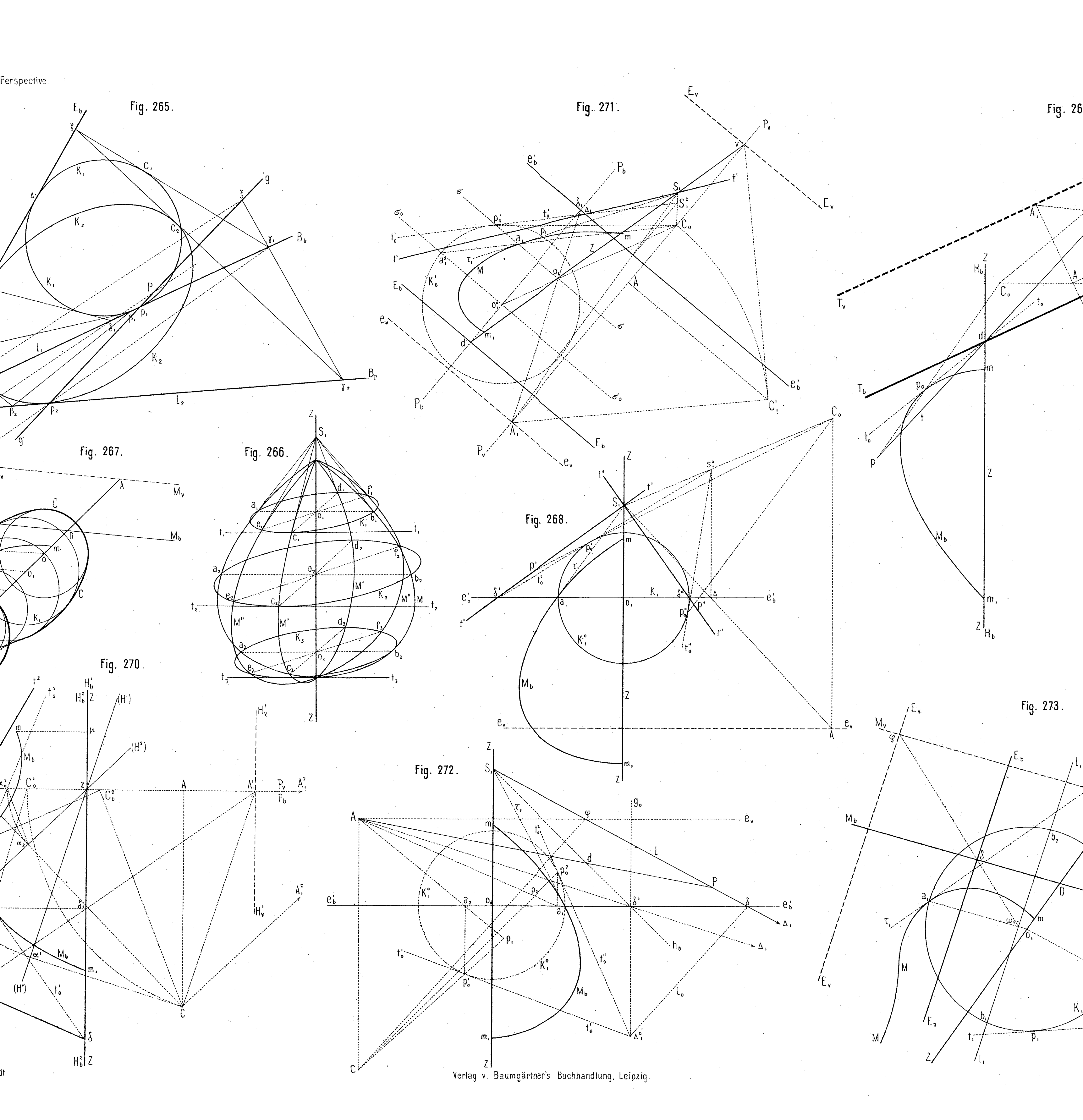
Verlag v. Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.



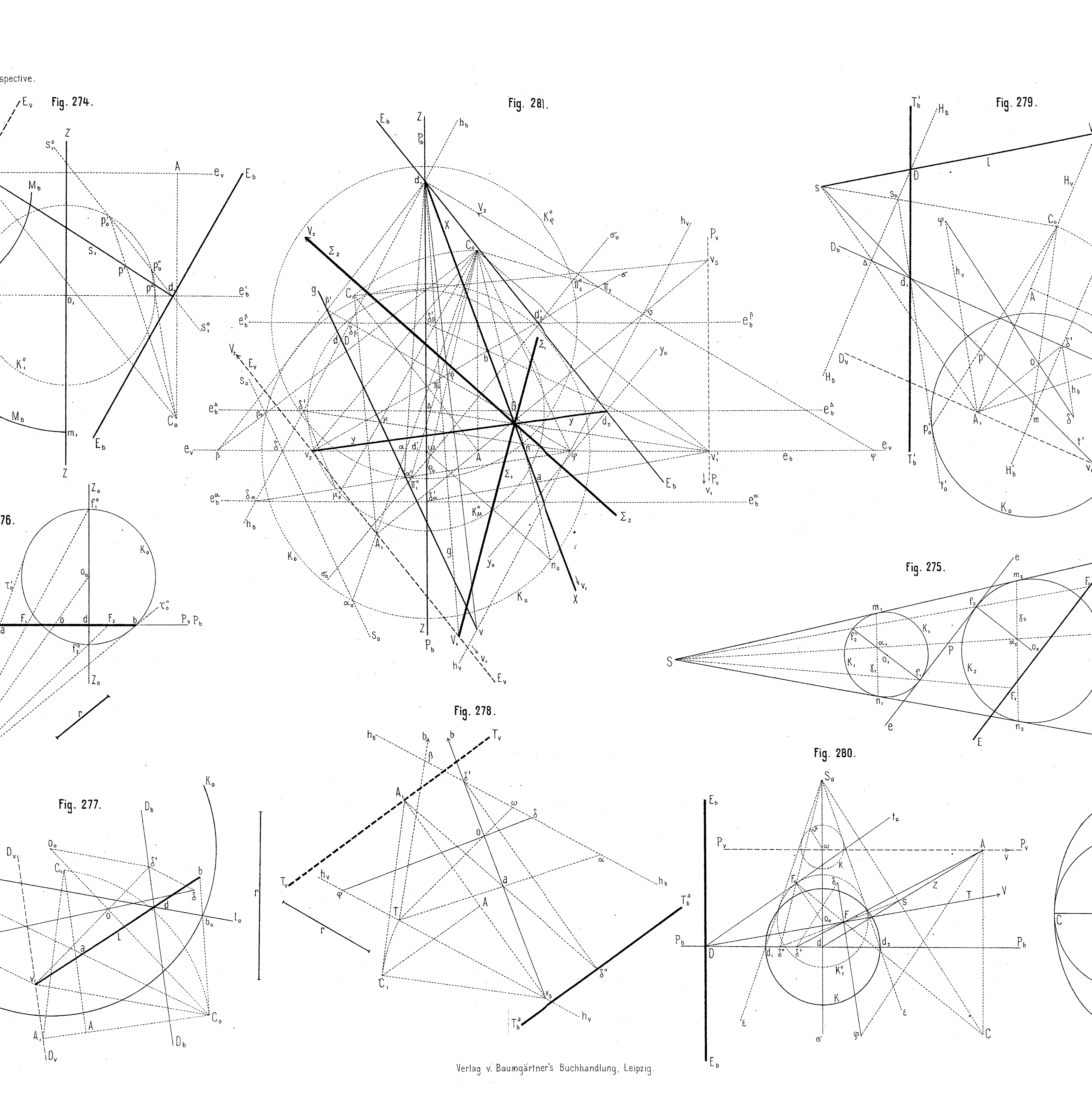
spective.
Fig. 245.
Fig. 248.
Fig. 249.
Fig. 247.
Fig. 250.
Fig. 246.
Fig. 251.
Verlag v. Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.



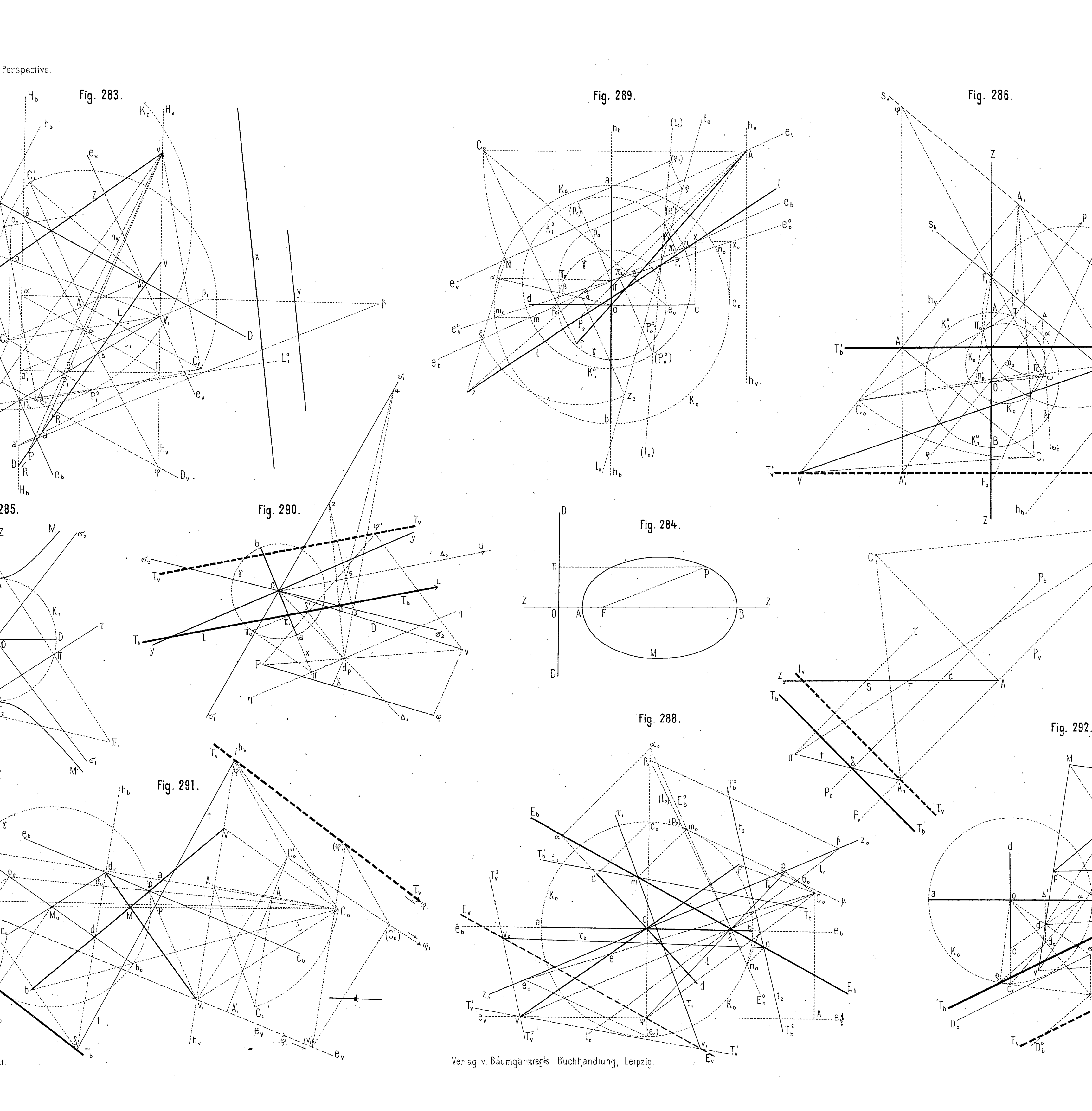
Verlag v. Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.



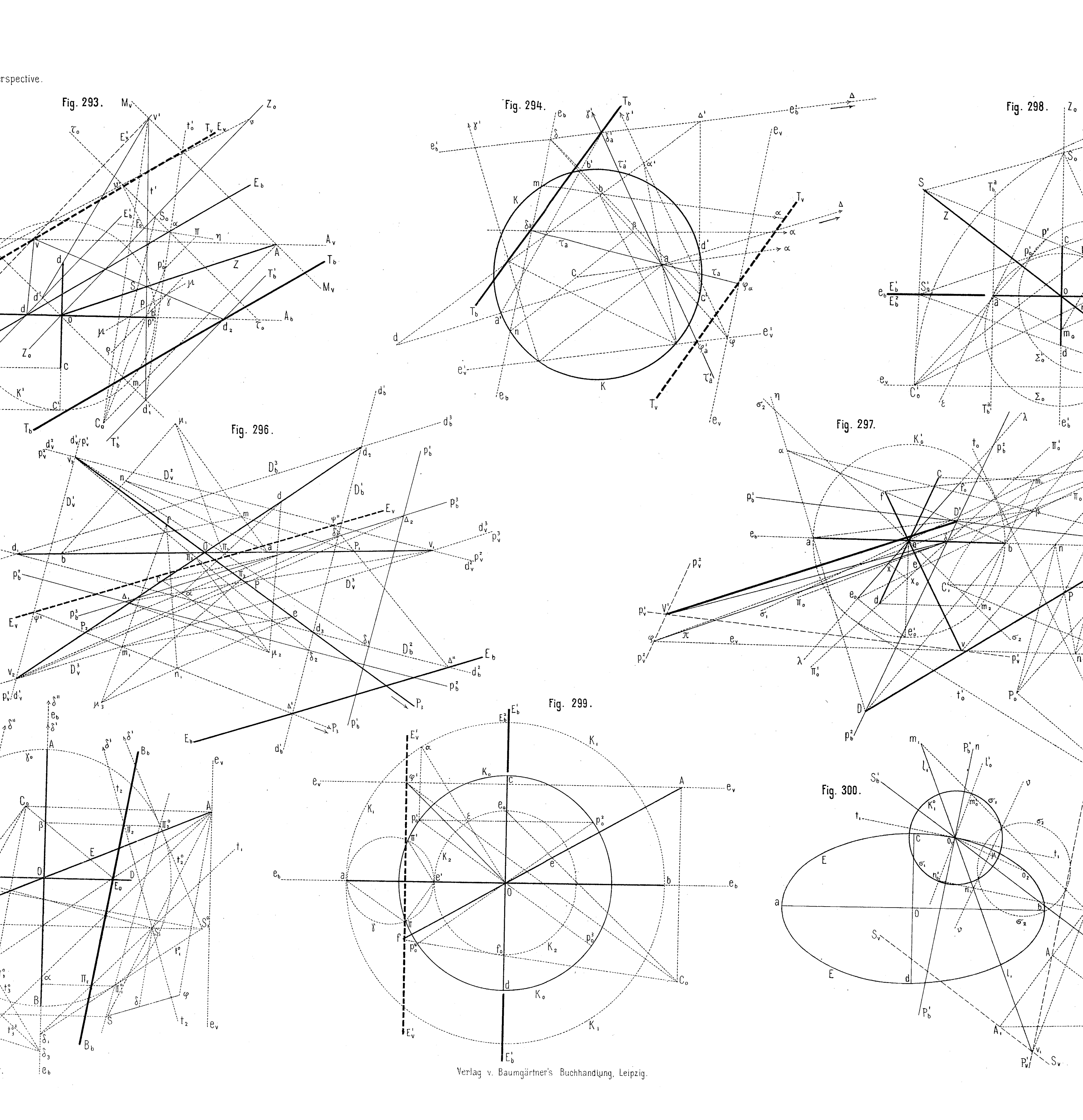
Verlag v. Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.



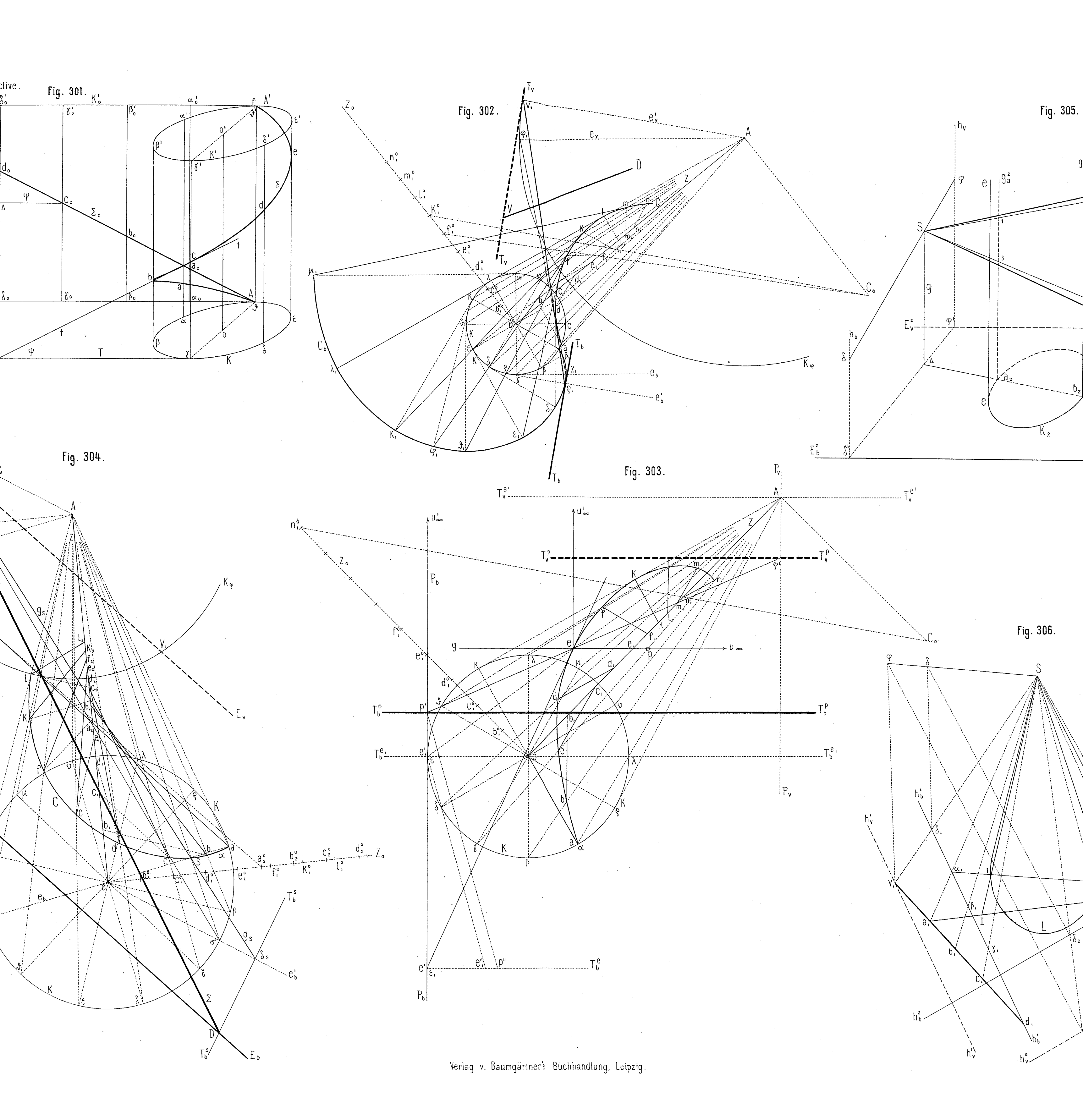
Verlag v. Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.

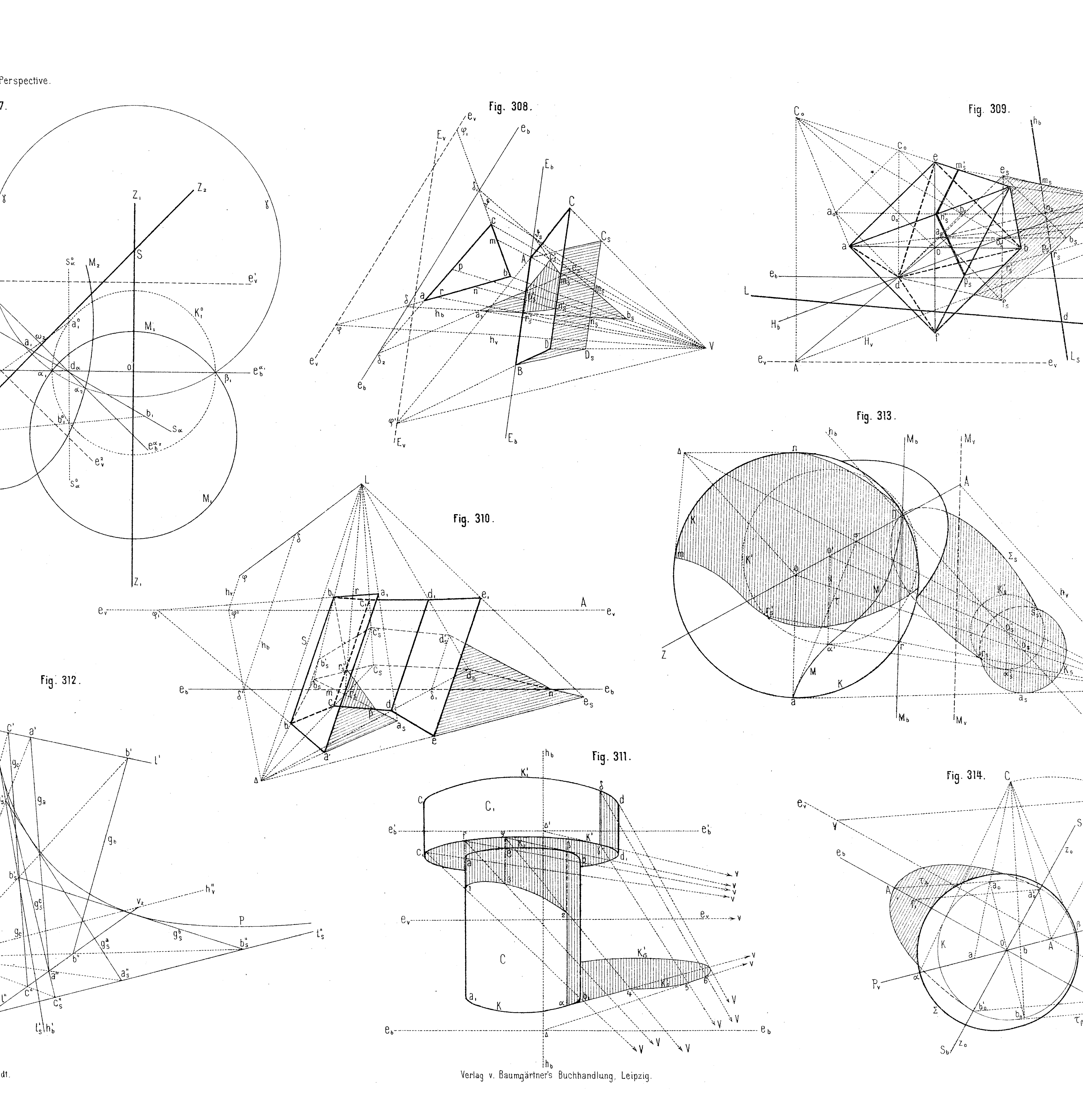

Perspective.
Fig. 283.
Fig. 289.
Fig. 286.
Fig. 290.
Fig. 284.
Fig. 288.
Fig. 291.
Fig. 292.
Verlag v. Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.

rspective.

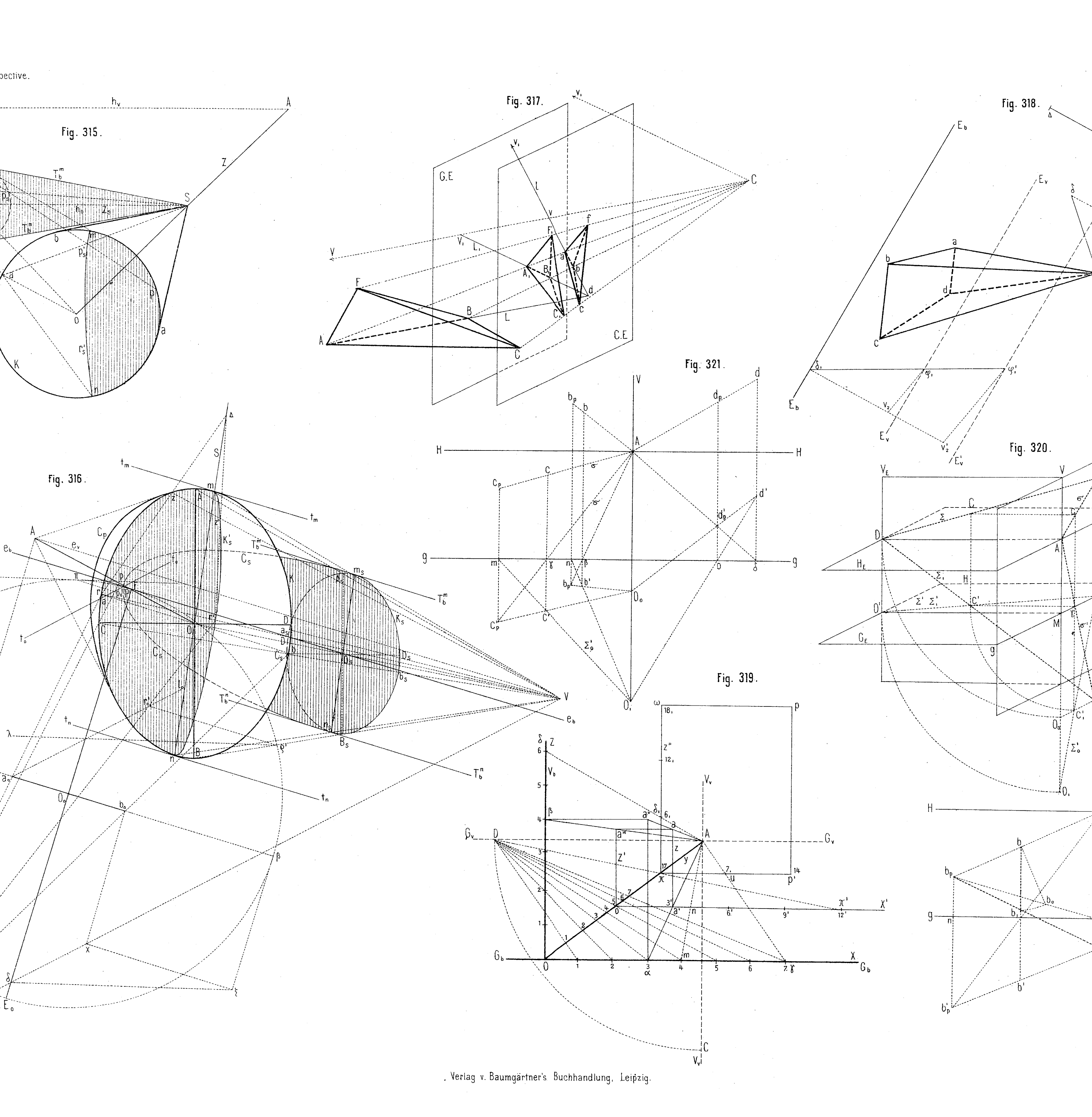


Verlag v. Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.


ctive.
Fig. 301.
Fig. 302.
Fig. 305.
Fig. 304.
Fig. 303.
Fig. 306.
Verlag v. Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.

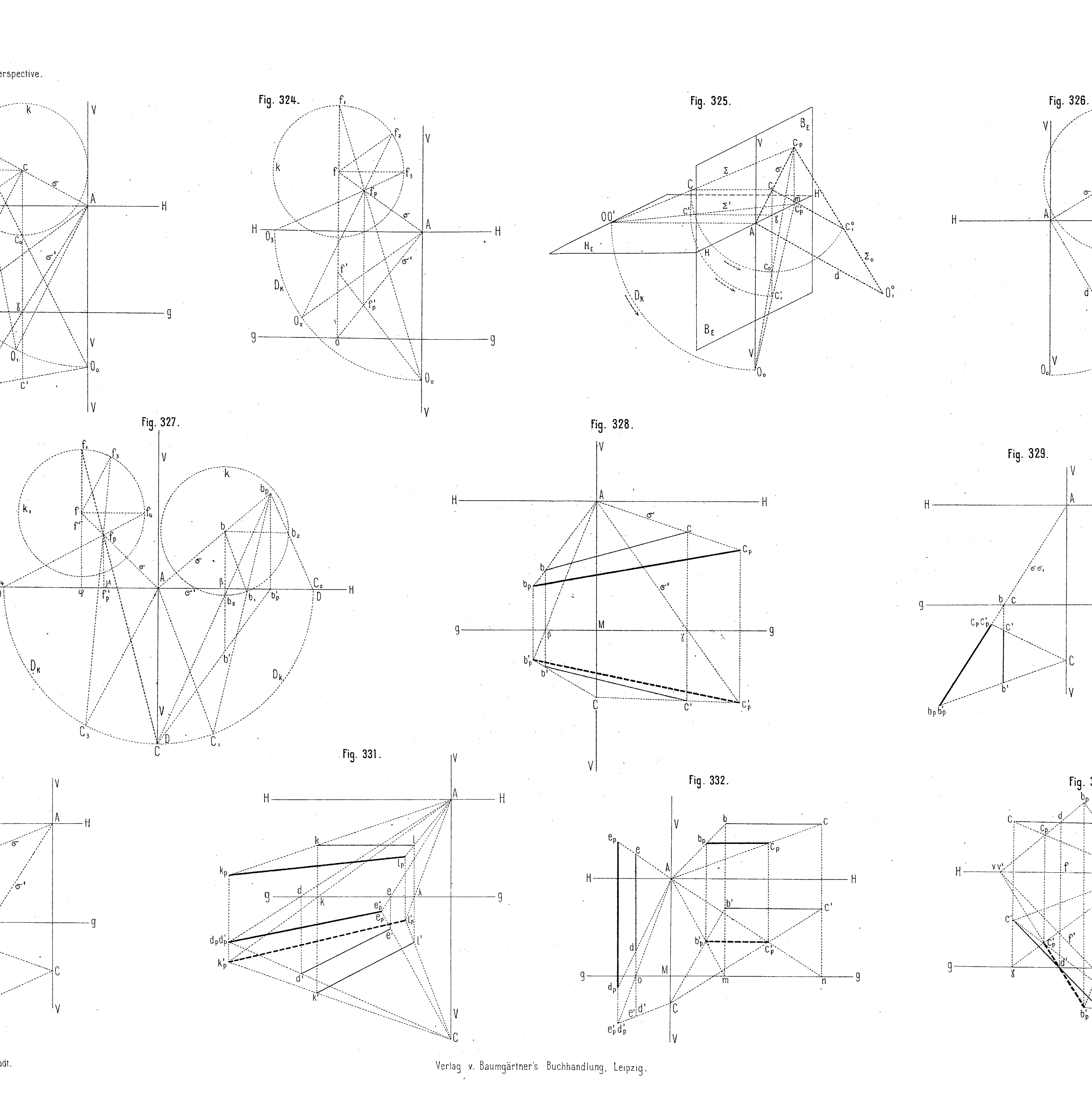

Perspective.
7.
Fig. 308.
Fig. 309.
Fig. 310.
Fig. 311.
Fig. 312.
Fig. 313.
Fig. 314.
dt.
Verlag v. Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.

...spective.



. Verlag v. Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.

erspective.



adt.